Esercizi

1. Trovare lo sviluppo in serie di Laurent attorno a $z = 3$ della funzione
$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(5-z)} \ , \tag{1}$$
e dedurre il valore del coefficiente di $(z-3)^2$ dello sviluppo.

2. Sviluppare in serie di Laurent le seguenti funzioni attorno ai punti indicati
$$a)\ \ f(z) = \frac{\sin z}{z-2} \ \ , \ z_0 = 2 \quad , \quad b)\ \ f(z) = z e^{\frac{1}{z+i}} \ \ , \ z_0 = -i \ . \tag{2}$$

3. Determinare gli sviluppi in serie di Laurent della funzione
$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2} \ . \tag{3}$$

4. Calcolare i seguenti integrali nel piano complesso:
$$\begin{aligned} &a) \int_{|z|=2} \frac{3e^{i\pi z}}{z^2-4z+3} dz \ \ , \ b) \int_{|z|=3} \frac{z(z+1)}{\sin(z+1)} dz \ \ , \ c) \int_{|z-2i|=2} \frac{dz}{e^z+1} \ , \\ &e) \int_{|z-2|=1} \frac{e^{1/z}}{(z^2+4)^2} dz \ \ , \ f) \int_{|z|=3} \frac{\cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)} dz \ , \end{aligned} \tag{4}$$

5. Descrivere le singolarita' della seguente funzione
$$f(z) = \frac{z e^{2\pi z^2}}{e^{2\pi z^2}-1} \ , \tag{5}$$
calcolare i residui corrispondenti e il valore dell'integrale
$$I_n = \int_{\gamma_n} f(z) dz \ , \tag{6}$$
con $n > 0$ numero naturale, e γ_n cammino chiuso percorso in senso positivo, centrato nell'origine e di raggio $R = \pi n$.

6. Descrivere le singolarita' della funzione
$$f(z) = \frac{e^{(1+i)z}}{e^{2z}+4} \ , \tag{7}$$
e calcolarne i residui. Calcolare il valore dell'integrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \tag{8}$$
considerando il cammino di integrazione rettangolare di vertici $r, r + i\pi, -r + i\pi, -r$. Infine calcolare il valore dell'integrale
$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\log x)}{x^2+4} dx \ . \tag{9}$$

7. Sia data la funzione
$$f(z) = \frac{z-1}{z^3-\alpha^3} \ , \tag{10}$$
con $\alpha \in \mathbb{C}$ e per gli z tali che $z^3 - \alpha^3 \neq 0$. (i) Trovare i poli di $f(z)$ e calcolare i residui nel caso $\alpha \in \mathbb{C}$. (ii) Definito $\alpha = ae^{it}$ con $a > 0$ e $t \in (0, \pi/3)$, calcolare il seguente integrale tramite il teorema dei residui:
$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^3-\alpha^3} dx \ . \tag{11}$$
Determinare $\lim_{t\to 0^+} I(e^{it})$. (iii) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha $f(z) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. (la restrizione dei reali).

8. Determinare il dominio di convergenza delle seguenti serie
$$a) \sum_{n=1}^{\infty} = \frac{\sin in}{(z+i)^n} \quad , \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+1/2}} \ , \tag{12}$$

9. Calcolare gli integrali di Fresnel
$$I_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx \quad , \quad I_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx \ . \tag{13}$$

Soluzioni

1. Scomponiamo la funzione di partenza in due termini:
$$f(z) = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{5-z} = \frac{(A-B)z + 5A - 3B}{(z-3)(5-z)} \ , \tag{14}$$
da cui ricaviamo che $A = B = 1/2$. Il primo termine di $f(z)$ si trova gia' nella forma richiesta, dallo sviluppo in serie. Riguardo al secondo, tramite semplici manipolazioni otteniamo:
$$\frac{1}{5-z} = \frac{1}{2+(3-z)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-3}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{2^{n+1}} \ , \tag{15}$$
for $|\frac{z-3}{2}| < 1$, i.e. for $|z-3| < 2$. Sommando i due contributi otteniamo
$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{2^{n+1}}\right] \\ =& \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-3} + \frac{1}{2} + \frac{z-3}{4} + \frac{(z-3)^2}{8} + \frac{(z-3)^3}{16} + \cdots\right] \ , \end{aligned} \tag{16}$$
che corrisponde allo sviluppo in serie di Laurent richiesto, in cui il coefficiente del termine $(z-3)^2$ e' pari a 16.

2. Consideriamo la prima funzione. a) Il denominatore si presenta gia' nella forma richiesta. Per quanto riguarda il numeratore

$$\begin{aligned}\sin z =& \sin[(z-2)+2] = \cos(z-2)\sin 2 + \cos 2 \sin(z-2)\\ =& \sin 2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-2)^{2n}}{(2n)!} + \cos 2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \ . \end{aligned} \tag{17}$$

Combinando otteniamo lo sviluppo in serie di Laurent

$$\sin z = \frac{\sin 2}{z-2} - \frac{\sin 2}{2}(z-2) + \cos 2 - \cos 2 \frac{(z-2)^2}{3!} + \cdots \tag{18}$$

b) Andiamo a scrivere la nostra funzione come

$$f(z) = [-i + (z+i)]e^{\frac{1}{z+i}} \ , \tag{19}$$

e sfruttando lo sviluppo in serie dell'esponenziale otteniamo

$$\begin{aligned} f(z) =& [-i + (z+i)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z+i)^n} \\ =& -i + (z+i) + 1 - \frac{i}{z+1} + \frac{1/2}{z+1} - \frac{i/2}{(z+1)^2} + \frac{1/3!}{(z+1)^2)} + \cdots \\ =& 1 - i + (z+i) + \left(\frac{1}{2} - i\right) \frac{1}{z+i} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{3!}\right) \frac{1}{(z+i)^2} + \cdots \ . \end{aligned} \tag{20}$$

3. Notiamo innanzitutto che la funzione ha due poli del primo ordine in $z_1 = -2$ e $z_2 = 1$, che sono le radici di $z^2 + z - 2 = 0$. Esistono dunque tre regioni in cui e' possibile sviluppare la funzione: a) il disco $|z| < 1$, b) la corona $1 < |z| < 2$, c) il dominio $2 < |z| < \infty$, ossia all'esterno del disco $|z| \geq 2$. Per studiare i tre sviluppi andiamo prima a scriver la funzione di partenza come

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} \ . \tag{21}$$

a) Nel disco $|z| < 1$ possiamo scrivere:

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} - \frac{1}{1-z} \ , \tag{22}$$

e per $|-z/2| < 1 \to |z| < 2$, e $|z| < 1$, i due termini al secondo membro possono essere scritti in termini di una serie geometrica:

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}z - \frac{7}{8}z^2 + \cdots \ . \tag{23}$$

b) In questo caso il termine $\frac{1}{2(1+\frac{z}{2})}$ si trova gia' nella forma giusta per essere espanso in una serie geometrica con $|z| < 2$. Riarrangiando l'atra componenete di $f(z)$ si ha

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} \ , \tag{24}$$

per $|1/z| < 1$, ossia per $|z| > 1$. Riassumendo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z} - \frac{z}{4} + \frac{1}{z^2} + \cdots \ . \tag{25}$$

c) Infine all'esterno del disco $|z| \geq 2$ il fattore $\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ e' gia' *pronto* per essere espanso assumendo $|z| > 1$, mentre

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^n} \ . \tag{26}$$

In totale avremo dunque

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \cdots \ . \tag{27}$$

4. a) L'integrando ha due poli semplici dati dalle radici del denominatore, ossia $z_1 = 1$ e $z_2 = 3$. Di queste, solo z_1 cade all'interno del cammino di integrazione, e dunque:

$$I = \int_{|z|=2}\frac{3e^{i\pi z}}{z^2-4z+3}dz = 2\pi i \ Res\left[\frac{3e^{i\pi z}}{z^2-4z+3}, z = z_1\right] \ . \tag{28}$$

Dato che si tratta di un polo semplice avremo

$$Res\left[\frac{3e^{i\pi z}}{z^2-4z+3}, z = z_1\right] = \frac{3e^{i\pi z}}{z-3}\Big|_{z\to 1} = \frac{3}{2} \ , \tag{29}$$

e infine $I = 3\pi i$.
b) In questo caso il valore della funzione integranda diverge quando $\sin(z+1) = 0$, ossia per tutti i valori tali che $z + 1 = n\pi$, con $n = 0, 1, 2\ldots$ numero intero, e dunque per $z = -1 + n\pi$. Di tutte le radici del denominatore, le uniche che cadono all'interno del cammino di integrazione sono quelle per cui $n = (0, 1)$, e dunque

$$\begin{aligned} I = \int_{|z|=3}\frac{z(z+1)}{\sin(z+1)}dz =& 2\pi i \ Res\left[\frac{z(z+1)}{\sin(z+1)}, z = -1\right] + \\ & 2\pi i \ Res\left[\frac{z(z+1)}{\sin(z+1)}, z = -1+\pi\right] \\ =& \ 2\pi i(R_1 + R_2) \ . \end{aligned} \tag{30}$$

Andiamo a calcolare i due residui separatamente. Nel primo caso avremo

$$R_1 = \lim_{z\to -1} (z-(-1)) \cdot \frac{z(z+1)}{\sin(z+1)} = \lim_{z\to -1} \frac{z(z+1)^2}{\sin(z+1)}$$
$$\lim_{z\to -1} \frac{1+4z+3z^2}{\cos(z+1)} = 0 \qquad (31)$$

Per il secondo termine invece

$$R_2 = \lim_{z\to -1+\pi} (z-(-1+\pi)) \cdot \frac{z(z+1)}{\sin(z+1)} = \lim_{z\to -1+\pi} \frac{z(z+1)(z+1-\pi)}{\sin(z+1)}$$
$$\lim_{z\to -1+\pi} \frac{1+4z+3z^2-\pi(1+2z)}{\cos(z+1)} = \pi(1-\pi) \ . \qquad (32)$$

Sommando i contributi otteniamo $I = 2\pi^2 i(1-\pi)$.
c) Il denominatore dell'integrale diverge per $e^z = -1$, ossia per tutti i valori tali che $z = i\pi + 2\pi i n$, con n intero. Nel cammino di integrazione dato, ossia la circonferenza di raggio 2 e centrata in $2i$, l'unico polo e' dato dalla radice con $n = 0$. Cio' porta a

$$I = \int_{|z-2i|=2} \frac{dz}{e^z+1} = 2\pi i \ Res \left[\frac{1}{e^z+1}, z = i\pi \right] \ , \qquad (33)$$

in cui

$$Res \left[\frac{1}{e^z+1}, z = i\pi \right] = \lim_{z\to i\pi} \left[(z-i\pi) \cdot \frac{1}{e^z+1} \right] = -1 \ , \qquad (34)$$

e infine $I = -2\pi i$.
d) I poli della funzione integranda sono dati da $z = 0$, che e' una singolarita' essenziale, e dalle radici di $z^2 + 4 = 0$, ossia $z = \pm 4i$, entrambi con molteplicita' due. Tuttavia, tutte le singolarita' giacciono al di fuori del cammino dato dalla circonferenza di raggio 1 e centrata in -2, e dunque il valore dell'integrale e' nullo.
e) La funzione sotto integrale presenta poli semplici in $z = 0$, e nelle radici dell'equazione $e^z + 2 = 0$, che ha come soluzione $z = \log 2 + i\pi + 2n\pi i$, con n numero intero. Di questi, solo $z = 0$ cade all'interno della circonferenza di raggio 3, e dunque l'integrale sara' dato da

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)} dz = 2\pi i \ Res \left[z \cdot \frac{\cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)}, z = 0 \right] = 2\pi i \frac{\cos \pi i}{3}$$
$$= \frac{2\pi i}{3} \frac{e^{i(i\pi)} + e^{-i(\pi i)}}{2} = \frac{2\pi i}{3} \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2}$$
$$= \frac{2\pi i}{3} \cosh \pi \ . \qquad (35)$$

5. poli della funzione $f(z)$ sono dati dalle radici dell'equazione $e^{2\pi z^2} = 1$, ossia per $2\pi z^2 = 2n\pi i$ con n numero intero. In particolare per $n > 0$ avremo $z = \pm\sqrt{n}e^{i\pi/4}$, per $n < 0$ $z = \pm\sqrt{|n|}e^{-i\pi/4}$, e infine per $n = 0$ avremo un'unica soluzione. In totale dunque avremo come poli

$$z = \{0, z_k^{(1,2,3,4)}\} = \{0, \sqrt{k}e^{i\pi/4}, -\sqrt{k}e^{i\pi/4}, \sqrt{k}e^{-i\pi/4}, -\sqrt{k}e^{-i\pi/4}\} \ , \tag{36}$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots$. Si tratta tutti di poli semplici. Andiamo a calcolarne i residui:

$$\begin{aligned} Res(f(z), z = 0) &= \lim_{z \to 0} \left[z \cdot \frac{ze^{2\pi z^2}}{e^{2\pi z^2} - 1} \right] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{z^2}{1 - e^{-2\pi z^2}} \right] \\ &= \lim_{z \to 0} \left[\frac{2z}{4\pi z e^{-2\pi z^2}} \right] = \frac{1}{2\pi} \ , \end{aligned} \tag{37}$$

e allo stesso modo

$$\begin{aligned} Res(f(z), z_k^{(i)}) &= \lim_{z \to z_k^{(i)}} \left[(z - z_k^{(i)}) \cdot \frac{ze^{2\pi z^2}}{e^{2\pi z^2} - 1} \right] = \lim_{z \to z_k^{(i)}} \left[\frac{(z - z_k^{(1)})z}{1 - e^{-2\pi z^2}} \right] \\ &= \lim_{z \to z_k^{(i)}} \left[\frac{2z - z_k^{(i)}}{4\pi z e^{-2\pi z^2}} \right] = \frac{1}{4\pi} \ . \end{aligned} \tag{38}$$

Il valore dell'integrale I_n sara' dato in generale da

$$I_n = 2\pi i \left(Res(f(z), z = 0) + \sum_{i=1}^{4} Res(f(z), z_k^{(i)}) \right) = i(1 + 2k(n)) \ , \tag{39}$$

con $k(n)$ e' il numero di interi positivi k tali che $\sqrt{k} < \pi n$ (ad esempio per $n = 1$, $k(n) = 9$).

6. I poli di $f(z)$ sono dati solo dalle radici del denominatore, ossia

$$e^{2z} + 4 = 0 \ \to \ 2z = \log(-4) \ \to z_n = \log 2 + \frac{i\pi}{2} + in\pi \ , \tag{40}$$

con n numero intero. I poli trovati sono tutti di ordine 1. I residui sono dati da:

$$\begin{aligned} Res(f(z), z_n) &= \lim_{z \to z_n} \left[(z - z_n) \cdot \frac{e^{(1+i)z}}{e^{2z} + 4} \right] = \frac{e^{(1+i)z_n}}{2e^{2z_n}} = \frac{e^{(i-1)z_n}}{2} \\ &= \frac{1}{2} e^{i \log 2 - i\pi/2 - \pi/2 - n\pi} e^{-\log 2} e^{-in\pi} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} i}{4} e^{i \log 2 - \pi/2 - n\pi} \ . \end{aligned} \tag{41}$$

Andiamo dunque a calcolare l'integrale di $f(z)$ sul cammino nel piano complesso, ossia

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz = &\int_{-r}^{r} f(z)dz + \int_{r}^{r+i\pi} f(z)dz + \int_{r+i\pi}^{-r+i\pi} f(z)dz + \int_{-r+i\pi}^{-r} f(z)dz \\ =&2\pi i \sum Res\left[f(z), z_j\right] \ . \end{aligned} \tag{42}$$

Nel limite $r \to \infty$ il primo termine sulla destra della precedente equazione rappresenta il nostro integrale di partenza sull'asse reale. Dobbiamo andare a stimare gli altri contributi:

$$\begin{aligned}\int_{r+i\pi}^{-r+i\pi} f(z)dz &= \int_{r}^{-r} f(x+i\pi)dx = -\int_{-r}^{r} f(x+i\pi)dx \quad (x+i\pi = z) \\ &= -\int_{-r}^{r} \frac{e^{(1+i)(x+i\pi)}}{e^{2(x+i\pi)}+4}dx = -\int_{-r}^{r} \frac{e^{(1+i)x}}{e^{2x}+4}e^{(1+i)i\pi}dx \\ &= \int_{-r}^{r} \frac{e^{(1+i)x}}{e^{2x}+4}e^{-\pi}dx \ , \end{aligned} \tag{43}$$

Consideriamo ora l'integrale su uno dei tratti verticali:

$$\int_{r}^{-r+i\pi} f(z)dz = \int_0^\pi f(r+it)idt = \int_0^\pi \frac{e^{(1+i)(r+it)}}{e^{2(r+it)}+4}idt \ . \tag{44}$$

Vogliamo trovare una maggiorazione che mandi a zero l'integrale per $r \to \infty$. Per questo notiamo che

$$|e^{(1+i)(r+it)}| = |e^{r-t+i(r+t)}| = e^{r-t} \le e^r \ , \tag{45}$$

dato che $t > 0$. D'altra parte for il denominatore

$$|e^{2(r+it)}+4| \ge |e^{2(r+it)}| - 4 = e^{2r} - 4 \ . \tag{46}$$

In totale avremo:

$$\left|\int_0^\pi \frac{e^{(1+i)(r+it)}}{e^{2(r+it)}+4}idt\right| \le \int_0^\pi \frac{e^r}{e^{2r}-4}dt = \pi\frac{e^r}{e^{2r}-4} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \ . \tag{47}$$

Nello stesso modo

$$\int_{-r+i\pi}^{-r} f(z)dz = \int_\pi^0 f(-r+it)idt = \int_0^\pi \frac{e^{(1+i)(-r+it)}}{e^{2(-r+it)}+4}idt \ . \tag{48}$$

e dunque:

$$|e^{(1+i)(-r+it)}| = |e^{-r-t+i(t-r)}| = e^{-r-t} \le e^{-r} \ , \tag{49}$$

e

$$|e^{2(-r+it)}+4| \ge 4 - |e^{2(-r+it)}| = 4 - e^{-2r} \ . \tag{50}$$

Combiniamo i due termini ottenendo

$$\left|\int_{\pi}^{0}\frac{e^{(1+i)(-r+it)}}{e^{2(-r+it)}+4}idt\right|\leq\int_{0}^{\pi}\frac{e^{-r}}{4-e^{-2r}}dt=\frac{\pi}{4}\frac{e^{-r}}{4-e^{-2r}}\xrightarrow[r\to\infty]{}0\ . \quad (51)$$

Risommando tutti i contributi avremo:

$$\int_{\Gamma}f(z)dz=(1+e^{-\pi})\int_{-r}^{r}f(x)dx+I_{|}\ , \quad (52)$$

in cui $I_|$ rappresenta il contributo dei pezzi verticali che vanno a zero nel limite $r\to\infty$ Notiamo che l'unico polo che entra all'interno del cammino specificato e' dato da $n=0$, per cui otteniamo immediatamente

$$2\pi i\ Res(f(z),z_0)=-2\pi i\cdot\frac{i}{4}e^{i\log 2-\pi/2}=\frac{\pi}{2}e^{i\log 2-\pi/2}\ , \quad (53)$$

e infine

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\frac{\pi}{2}\frac{e^{i\log 2-\pi/2}}{(1+e^{-\pi})}\ . \quad (54)$$

Possiamo riscrivere il precedente integrale come:

$$\begin{aligned}I=&\frac{\pi}{2}e^{-\pi/2}\frac{e^{i\log 2}}{(1+e^{-\pi})}=\frac{\pi}{2}\frac{e^{i\log 2}}{(e^{\pi/2}+e^{-\pi/2})}=\frac{\pi}{2}\frac{\cos\log 2+i\sin\log 2}{(e^{\pi/2}+e^{-\pi/2})}=\\=&\frac{\pi}{4}\frac{\cos\log 2+i\sin\log 2}{\cosh\pi/2}.\end{aligned} \quad (55)$$

In questo modo, data la sostituzione $x=e^t$, l'integrale I_2 diviene:

$$I_2=\int_0^{\infty}\frac{\cos(\log x)}{x^2+4}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^t\cos t}{e^{2t}+4}dt=\Re[I]=\frac{\pi}{4}\frac{\cos\log 2}{\cosh\pi/2}\ . \quad (56)$$

7. (ii) La funzione ha delle singolarita' isolate nelle radici del denominatore $z^3=\alpha^3$. Se $\alpha=0$ si ha un solo polo in $z=0$. Vediamo inoltre che

$$\lim_{z\to 0}\left[z^3\cdot\frac{z-1}{z^3}\right]=-1\ , \quad (57)$$

da cui riconosciamo che si tratta di un polo di ordine 3. Nel caso in cui $\alpha\neq 0$ si hanno tre radici date da $z_{1,2,3}=\{\alpha,\alpha e^{2\pi i/3},\alpha e^{-2\pi i/3}\}$. Se una di queste radici e' pari a 1, e cio' accade per $\alpha^3=1$, allora la funzione ha in essa una singolarita' eliminabile (mentre le altre due sono poli semplici). Infatti in questo caso:

$$\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^3-1}=\frac{1}{3}. \quad (58)$$

Se nessuna delle radici e' pari all'unita' allora si tratta di poli semplici con residui

$$\lim_{z\to z_k}\left[(z-z_k)\cdot\frac{z-1}{z^3-\alpha^3}\right]=\lim_{z\to z_k}\left[\frac{(z-z_k)+(z-1)}{3z^2}\right]=\frac{z_k-1}{3z_k^2}\ , \tag{59}$$

per $k=1,2,3$.
(iii) Per risolvere l'integrale consideriamo il solito cammino di integrazione Γ nel piano complesso dato da $z\in[-R,R]\cup C_{\mathrm{R}}$, con C_{R} semi-cerchio semi-circolare che chiude nel piano superiore $\mathrm{Im}z>0$. Avremo:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\frac{z-1}{z^3-\alpha^3}dz=&2\pi i\sum Res\left[\frac{z-1}{z^3-\alpha^3},z_j\right]\\ =&\int_{-R}^{R}\frac{x-1}{x^3-\alpha^3}dx+\int_{C_{\mathrm{R}}}\frac{z-1}{z^3-\alpha^3}dz\ ,\end{aligned} \tag{60}$$

dove ricordiamo $\alpha=ae^{it}$ e $t\in(0,\pi/3)$. Nel limite $R\to\infty$ il primo termo sul lato destro corrisponde con il nostro integrale di partenza Per l'integrale sul semicerchio superiore vediamo ad esempio che

$$\left|\int_{C_{\mathrm{R}}}\frac{z-1}{z^3-\alpha^3}dz\right|\le\int_0^\pi\frac{|Re^{i\theta}-1|}{|R^3e^{i3\theta}-\alpha^3|}d\theta\ .\xrightarrow[R\to\infty]{}\frac{\pi}{R^2}\xrightarrow[R\to\infty]{}0 \tag{61}$$

Per calcolare i residui dobbiamo identificare i poli che cadono all'interno del cammino superiore. In generale avremo:

$$\{z_1,z_2,z_3\}=\{ae^{it},ae^{it+2\pi i/3},ae^{-2\pi i/3+it}\}\ . \tag{62}$$

Dato che la variabile t varia nell'intervallo $(0,\pi/3)$ solo le prime due radici cadono all'interno del piano superiore, mentre la terza giace in $\mathrm{Im}z<0$. In totale:

$$\begin{aligned}\sum Res\left[\frac{z-1}{z^3-\alpha^3},z_j\right]=&\frac{z_1-1}{3z_1^2}+\frac{z_2-1}{3z_2^2}=\frac{\alpha-1}{3\alpha^2}+\frac{\alpha e^{2i\pi/3}-1}{3\alpha^2e^{4i\pi/3}}\\ =&\frac{1}{3\alpha^2}\left[\alpha-1+\frac{\alpha e^{2i\pi/3}-1}{e^{4i\pi/3}}\right]\\ =&\frac{1}{3\alpha^2}\left[\alpha-1-e^{-4i\pi/3}+\alpha e^{-2i\pi/3}\right]\ .\end{aligned} \tag{63}$$

Sommando tutti i contributi otteniamo dunque

$$I(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-1}{x^3-\alpha^3}dx=\frac{2\pi i}{3\alpha^2}\left[\alpha-1-e^{-4i\pi/3}+\alpha e^{-2i\pi/3}\right]\ , \tag{64}$$

e

$$I(e^{it})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-1}{x^3-\alpha^3}dx=\frac{2\pi i}{3e^{2it}}\left[e^{it}-1-e^{-4i\pi/3}+e^{it}e^{-2i\pi/3}\right]\ . \tag{65}$$

Nel limite $t \to 0^+$ avremo:

$$\lim_{t\to 0^+} I(e^{it}) = \frac{2\pi i}{3}\left[e^{-2i\pi/3} - e^{-4i\pi/3}\right] = \frac{2\pi i}{3}\left[e^{-2i\pi/3} - e^{2i\pi/3}\right]$$
$$= -\frac{4\pi i}{3}\cdot i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \qquad (66)$$

(iii) Vediamo che la funzione $f(z)$ indipendentemente da α va come $1/z^2$ nell'intorno dell'infinito e dunque li e' sommabile. Se non ha singolairta' reali, e' continua su $\mathbb{R}$ e vi e' sommabile. In pratica se α^3 non e' reale la funzione 'e sommabile. Se poi $\alpha^3 \in \mathbb{R}$ ma $\alpha^3 \neq 1$, il polo di $f(z)$ e' del primo ordine o del terzo ordine se $\alpha = 0$, e dunque la funzione non e' sommabile nell'intorno di tale polo. Se pero' $\alpha^3 = 1$, la singolarita' e' eliminabile e la $f(z)$ e sommabile. Un numero complesso ha cubo reale solo se e' reale, oppure e' della forma $\pm re^{i2\pi/3}$, ossia e' definito dall'insieme $\mathbb{R}\cup L\cup\bar{L}$, in cui $L = \{t^{2\pi i/3} : t \in \mathbb{R}\}$ (e $\bar{L}$ insieme dei complessi coniugati). In definitiva $f(z)$ e' sommabile se e solo se $\alpha \in \mathbb{C} - (\mathbb{R}\cup L\cup\bar{L})$.

8. In questo caso i coefficienti della serie sono definiti come $c_n = \sin in = i\sinh n$. Vediamo se esiste ed e' finito, il rapporto

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{|i\sinh(n+1)|}{|i\sinh n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1} - e^{-n-1}}{e^n - e^{-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e - e^{-2n-1}}{1 - e^{-2n}} = e\ , \qquad (67)$$

dunque $r = e$, la serie converge all'interno del dominio $|z+i| > e$.
b) Per la prima delle due serie si ha

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{|e^{i(n+1)}|}{|e^{in}|} = 1\ , \qquad (68)$$

da cui la convergenza e' data per $|z+1| > 1$. Per la seconda serie invece

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|e^{-in-1/2}|}{|e^{-i(n+1)-1/2}|} = 1\ , \qquad (69)$$

ossia la serie converge nel dominio $|z+1| < 1$. La serie e' dunque divergente dovunque.

9. Consideriamo la funzione $f(z) = e^{iz^2}$ e integriamola su un circuito chiuso Γ, percorso in senso antiorario, dato da uno spicchio di circonferenza dato dal segmento $[0,R]$, dall'arco $C_{\mathrm{R}} = \{z : Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi,4]\}$, e dal segmento obliquo $\mathrm{L} = \{z : \rho e^{i\pi/4}, 0 \le \rho \le R\}$. Avremo dunque

$$\int e^{iz^2} dz_\Gamma = \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_{\mathrm{R}}} e^{iz^2} dz + \int_{\mathrm{L}} e^{iz^2} dz = 0\ , \qquad (70)$$

in cui la somma e' nulla dato che la funzione non ha singolarita' nel dominio chiuso. Analizziamo il contributo sullo spicchio di circonferenza, e definiamo $\xi = z^2$, tale che

$$\int_{C_{\mathrm{R}}} e^{iz^2} dz = \int_{\mathcal{C}_{\mathrm{R}^2}} \frac{e^{i\xi}}{2\sqrt{\xi}} d\xi \ , \tag{71}$$

in cui $\mathcal{C}_{\mathrm{R}^2}$ e' il quarto di cerchio di raggio R^2. La funzione $g(\xi) = 1/2\sqrt{\xi}$ soddisfa il lemma di Jordan e nel limite $R \to \infty$ l'integrale va a zero. Sul segmento obliquo ($z^2 = \rho^2 e^{i\pi/2} = i\rho^2$)

$$\int_{\mathrm{L}} e^{iz^2} dz = \int_R^0 e^{i^2\rho^2} e^{i\pi/4} d\rho = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho \xrightarrow[R\to\infty]{} -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ . \tag{72}$$

Mandando a infinito il raggio, $R \to \infty$, avremo dunque:

$$I = \int_0^\infty e^{ix^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \ , \tag{73}$$

da cui ricaviamo immediatamente gli integrali di Fresnel:

$$I_1 = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \Re[I] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \ , \tag{74}$$

$$I_2 = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \Im[I] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \ . \tag{75}$$