Homework I

1. Trovare il raggio di convergenza R della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{3n^{\alpha}+2} \ , \tag{1}$$

   e studiarne le propieta' di convergenza per $|z| \leq R$ and $|z| > R$.

2. Trovare lo sviluppo in serie di Laurent della funzione $f(z)$ nel dominio specificato:

   (a) $f(z) = (z-1)^{-2} \quad \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < \infty\}$,
   (b) $f(z) = \frac{4+z}{z^3+3z^2} \quad \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 3\}$
   (c) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(5-z)} \quad \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 3\}$

3. Studiare il tipo di singolarita' delle seguenti funzioni e calcolarne l'eventuale residuo:

   (a) $f(z) = \frac{(\log z)^4}{1+z^2}$;
   (b) $f(z) = \frac{e^z \sinh z}{z^5}$;
   (c) $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
   (d) $f(z) = \frac{\cos \pi z}{(1+z)^4}$.

4. Calcolare i seguenti integrali sfruttando il metodo dei residui:

   (a) $\int_{|z|=1} z^2 \sin(1/z) dz$;
   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(\pi^2-4x^2)} dx$;
   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx \quad (0 < a < b)$;

Homework I

1. Consideriamo innanzitutto la trasformazione $y = -z^4$, tale che la serie di potenze assume la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{3n^\alpha + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n c_n \ . \tag{1}$$

Il raggio di convergenza e' dato da

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3(n+1)^\alpha + 2}{3n^\alpha + 2} \right| = 1 \ . \tag{2}$$

La convergenza dipende ora dai valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\alpha > 1$: La serie (2) converge totalmente nel dominio $|y| \leq 1$, dato che in modulo

$$\left| \frac{y^n}{3n^\alpha + 2} \right| \leq \frac{1}{3n^\alpha + 2} \tag{3}$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n^\alpha + 2} \tag{4}$$

converge in tutta la circonferenza. Notiamo inoltre che per $\alpha > 1$ anche la serie originale converge assolutamente in tutto il disco $|z| < 1$.

- $\alpha \leq 0$: Per il teorema di Cauchy-Hadamard la (2) converge assolutamente in $|y| < 1$, uniformemente in $|y| \leq \rho < 1$ e diverge per $|y| > 1$. La serie non converge sulla circonferenza $|y| = 1$, dato che non e' soddisfatta la condizione necessaria

$$\lim_{n\to\infty} |c_z^n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n^\alpha + 2} = \frac{1}{2} \ . \tag{5}$$

Tutte queste considerazioni si applicano anche alla serie di partenza definita in z.

- $0 < \alpha \leq 1$: in accordo con il teorema di Cauchy-Hadamard la (2) converge assolutamente in $|y| < 1$, uniformemente in $|y| \leq \rho < 1$ e diverge per $|y| > 1$. Sul bordo della disco la serie converge in tutti i punti eccetto $z = 1$. La serie diverge assolutamente per $|z| = 1$. Tornando alla variabile z, la serie di partenza soddisfa tutte le condizioni del teorema di Cauchy-Hadamard all'interno (e all'esterno) del disco $|z| = 1$. La serie inoltre converge su tutti i punti della circonferenza eccetto che in $y = -z^4 = 1$, ossia per le 4 radici $z = \pm e^{\pm i\pi/4}$. La serie diverge assolutamente se $|y| = |-z^4| = |z| = 1$.

2. Trovare lo sviluppo in serie di Laurent della funzione $f(z)$ nel dominio specificato:

   (a) La funzione e' gia' nello sviluppo appropriato.

   (b) Notiamo innanzitutto che la funzione di partenza puo' essere scomposta nel modo seguente:

$$f(z) = \frac{4+z}{z^2(z+3)} = \frac{4}{3z^2} - \frac{1}{9z} + \frac{1}{9(3+z)} \ . \tag{6}$$

   I primi due termini della precedente espressione sono gia' nella forma giusta. Andiamo a riscrivere l'ultimo come:

$$\frac{1}{9(3+z)} = \frac{1}{27(1-\frac{-z}{3})} = \frac{1}{27}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+3}} \ . \tag{7}$$

   Nell'ultimo passaggio abbiamo riconosciuto la somma di una serie geometrica di ragione $-z/3$ che ammette lo sviluppo in serie per $|-z/3| < 1$, ossia per $|z| < 3$. Sommando tutti i contributi avremo in totale:

$$f(z) = \frac{4}{3z^2} - \frac{1}{9z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+3}} \ . \tag{8}$$

   (c) Andiamo a scomporre la funzione come somma di due termini:

$$f(z) = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{5-z} = \frac{(B-A)z + 5A - 2B}{(z-3)(5-z)} \ , \tag{9}$$

   tale

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-2} + \frac{1}{5-z}\right] \ . \tag{10}$$

   Il primo termine si trova gia' nella forma appropriata. Andiamo a scrivere il secondo come

$$\frac{1}{5-z} = \frac{1}{3+(2-z)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z-2}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{3^n} \ , \tag{11}$$

   avendo sfruttato le proprieta' della serie geometrica, con $|(z-2)/3| < 1$ ossia tale che $|z-2| < 3$. In conclusione otteniamo che nella corona circolare data, la $f(z)$ ammette il seguente sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}\right] \ . \tag{12}$$

3. Studiare il tipo di singolarita' delle seguenti funzioni e calcolarne l'eventuale residuo:

   (a) Consideriamo la $f(z)$ definita nel sottoinsieme del piano complesso $\mathbb{C} - \{\{z : \mathrm{Re} z \leq 0, \mathrm{Im} z = 0\} \cup \{\pm i\}\}$ in cui essa e' olomorfa. La funzione ha due singolarita' isolate in $z \pm i$, entrambi poli semplici. I residui nei due valori di z saranni dati da:

$$\begin{aligned} Res[f(z), z = i] &= \lim_{z \to i} \left[(z - i) \cdot \frac{(\log z)^4}{(z - i)(z + i)} \right] \\ &= \frac{(\log i)^4}{2i} = \frac{\pi^4}{32i} \ , \end{aligned} \tag{13}$$

   e

$$\begin{aligned} Res[f(z), z = -i] &= \lim_{z \to i} \left[(z + i) \cdot \frac{(\log z)^4}{(z + i)(z + i)} \right] \\ &= -\frac{[\log(-i)]^4}{2i} = \frac{\pi^4}{32i} \ . \end{aligned} \tag{14}$$

   (b) La funzione ha una singolarita' isolata in $z = 0$. Per studiarne il tipo andiamo a scrivere lo sviluppo in serie di Laurent attorno a questo punto della $f(z)$. Sfruttando le proprieta' dell'esponenziale e del seno iperbolico si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{3z^2} + \frac{1}{3z} + \frac{2}{15} + \mathcal{O}(z) \ . \end{aligned} \tag{15}$$

   Il punto $z = 0$ corrisponde dunque ad un polo del quarto ordine con residuo pari a $1/3$.

   (c) La funzione ha delle singolarita' isolate in corrispondenza delle radici dell'equazione $e^z + 1 = 0$, ossia per $z_n = i\pi + 2n\pi i$, con $n = 0, 1, 2 \ldots$. Si tratta di poli del primo ordine, il cui residuo e' dato da

$$Res[f(z), z = z_n] = \lim_{z \to z_n} \left[(z - z_n) \cdot \frac{e^{\alpha z}}{1 + e^z} \right] = \frac{e^{\alpha z_n}}{e^{z_n}} = -e^{\alpha z_n} \ . \tag{16}$$

   (d) La funzione ha una singolarita' isolata in $z = -1$. Quest'ultima e' polo di 4 ordine, dato che

$$\lim_{z \to -1} \left[(z + 1)^4 \cdot \frac{\cos \pi z}{(z + 1)^4} \right] = -1 \ . \tag{17}$$

Il residuo sara' dato da

$$Res[f(z), z=-1] = \frac{1}{3!}\lim_{z\to -1}\frac{d^3}{dz^3}\left[(z+1)^4\cdot\frac{\cos\pi z}{(z+1)^4}\right] = 0\ . \tag{18}$$

4. Calcolare i seguenti integrali sfruttando il metodo dei residui:

   (a) Per sfruttare il metodo di residui e' necessario studiare le signolarita' della funzione integranda all'interno della circonferenza unitaria centrata nell'origine. Si nota immediatamente che la funzione ha una singolarita' essenziale in $z=0$, che cade dentro il cammino di integrazione. Avremo dunque

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i\ Res(z^2\sin(1/z), z=0)\ . \tag{19}$$

   Per calcolarne il residuo andiamo a studiare lo sviluppo in serie di Laurent intorno alla singolarita'. Ricordiamo che per la funzione $\sin z$ vale la seguente espansione:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ , \tag{20}$$

   da cui

$$\sin 1/z = 1/z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}\ . \tag{21}$$

   Data la funzione di partenza, e' immediato verificare che il residuo in $z=0$ di $z^2\sin(1/z)$, ossia il coefficiente del termine in $1/z$ e' pari a $-1/6$. L'integrale di partenza sara' dato dunque da

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i\cdot(-\frac{1}{3!}) = -\frac{i\pi}{3}\ . \tag{22}$$

   (b) Consideriamo l'integrale di Fourier corrispondente a quello di partenza

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx\ . \tag{23}$$

   Per integrare la precedente possiamo scegliere un cammino nel piano complesse Γ, dato da un semicerchio che passa sull'asse reale e si chiude nel semipiano immaginario superiore $\mathrm{Im}z > 0$,

come mostrato nel grafico di sinistra in Fig. 1. In questo caso avremo:

$$2\pi i \sum_j Res[f(z), z_j] = \int_\Gamma \frac{ze^{iz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = \int_{-R}^{R} \frac{ze^{iz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} + \int_{C_R} \frac{ze^{iz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} \ . \tag{24}$$

La funzione integranda ha.quattro poli semplici, corrispondenti alle radici del denominatore $z_{1,2} = \pm ia$ e $z_{3,4} = \pm b$. La somma sui residui tuttavia, e' limitata alle singolarita' che giacciono all'interno del cammino di integrazione, ossia a quelle con il segno positivo $z_1 = ia$ e $z_3 = ib$. Dato che si tratta di poli semplici possiamo calcolarci immediatamente i residui corrispondenti:

$$\begin{aligned} Res[f(z), z = ia] &= \lim_{z\to ia} \left[(z - ia) \cdot \frac{ze^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} \right] \\ &= \frac{e^{-a}}{2(b^2-a^2)} \ , \end{aligned} \tag{25}$$

e similmente

$$Res[f(z), z = ib] = \frac{e^{-b}}{2(a^2-b^2)} \ , \tag{26}$$

Come ultima passo, andiamo a dimostrare che nel limite $R \to \infty$ l'integrale sul semicerchio C_R tende a zero. Possiamo sfruttare il lemma di Jordan dato che:

$$\left| \frac{z}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} \right| \leq \frac{R}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ . \tag{27}$$

Nel limite in cui il raggio tende all'infinito possiamo dunque scrivere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}dz}{(x^2+a^2)(x^2+x^2)} = \pi i \frac{e^{-a} - e^{-b}}{b^2-a^2} \ , \tag{28}$$

e infine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = \pi \frac{e^{-a} - e^{-b}}{b^2-a^2} \ . \tag{29}$$

(c) Come primo passo riscriviamo l'integrale di partenza come la parte reale dell'integrale di Fourier:

$$\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\pi^2 - 4x^2} dx \tag{30}$$

La funzione integranda diverge per le radici del denominatore, ossia per le soluzioni dell'equazione $\pi^2 - 4x^2 = 0$, pari a $x_{1,2} = \pm/2$. Si tratta di due poli semplici che giacciono entrambi sull'asse reale. Andiamo dunque a considerare un cammino di integrazione che partendo da $-\infty$ gira attorno ai due poli e va a $+\infty$ per poi chiudersi su un semicerchio nel piano $\mathrm{Im} z > 0$ (vedi plot di destra di Fig. 1). In accordo con il teorema dei residui:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz = &\int_{-R}^{-\pi/2-\rho} \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz + \int_{-\pi/2+\rho}^{\pi/2-\rho} \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz \\ &+ \int_{\pi/2+\rho}^{R} \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz + \int_{C_{\rho_-}} \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz \\ &+ \int_{C_{\rho_+}} \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz \ . \end{aligned} \quad (31)$$

Nel limite $(R \to \infty, \rho \to 0)$ i primi tre termini a destra della precedente espressione corrispondono proprio all'integrale di partenza. L'integrale sul semicerchio grande va a zero nel limite $R \to \infty$ per il lemma di Jordan. Infatti la $f(z) = \frac{1}{\pi^2 - 4z^2}$ va a zero uniformemente per $R \to \infty$:

$$\left| \frac{1}{\pi^2 - 4z^2} \right| \leq \frac{1}{4R^2 - \pi^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ . \quad (32)$$

Andiamo ora a considerare gli integrali sui semicerchi piccoli. Per l'integrale sul cammino C_{ρ_-} ci stiamo muovendo su una circonferenza di raggio ρ centrata in $-\pi/2$, ossia in $z = -\pi/2 + \rho^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, e dunque

$$\begin{aligned}\int_{C_{\rho_-}} \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz &= i \int_\pi^0 \frac{e^{-i\pi/2} e^{i\rho e^{i\theta}}}{\pi^2 - \pi^2 + 4\pi\rho e^{i\theta} - 4\rho^2 e^{2i\theta}} \rho e^{i\theta} d\theta \\ &= -i^2 \int_\pi^0 \frac{e^{i\rho e^{i\theta}}}{4\pi e^{i\theta} - 4\rho e^{2i\theta}} e^{i\theta} d\theta \xrightarrow[\rho\to 0]{} -\frac{1}{4} \ . \end{aligned} \quad (33)$$

Nello stesso modo, eseguendo l'integrale sulla circonferenza centrata in $\pi/2$:

$$\begin{aligned}\int_{C_{\rho_+}} \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz &= i \int_\pi^0 \frac{e^{i\pi/2} e^{i\rho e^{i\theta}}}{\pi^2 - \pi^2 - 4\pi\rho e^{i\theta} - 4\rho^2 e^{2i\theta}} \rho e^{i\theta} d\theta \\ &= -i^2 \int_\pi^0 \frac{e^{i\rho e^{i\theta}}}{4\pi e^{i\theta} + 4\rho e^{2i\theta}} e^{i\theta} d\theta \xrightarrow[\rho\to 0]{} -\frac{1}{4} \ . \end{aligned} \quad (34)$$

Sommando tutti i contributi precedenti, nel limite $(R \to \infty, \rho \to 0)$, avremo infine

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ . \quad (35)$$

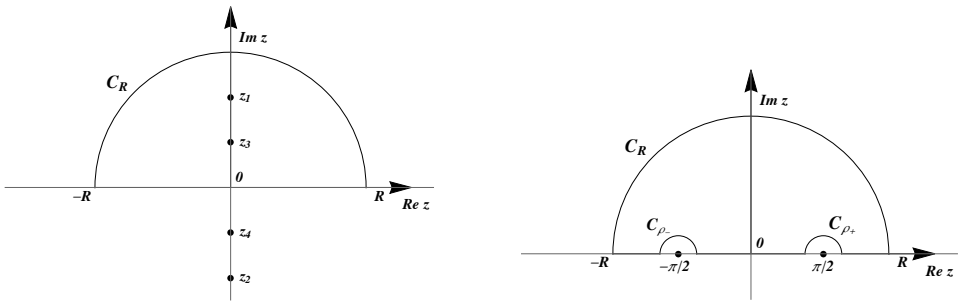

Figure 1: Cammini nel piano complesso usati per gli esercizi 4-b (sinistra) e 4-c (destra).

Notiamo infine che l'integrale sul cammino chiuso e' uguale a $2\pi i$ moltiplicato per la somma dei residui contenuti Γ. Tuttavia, non essendoci radici nel piano complesso, la sommatoria e' nulla e dunque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2} dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{\pi^2 - 4z^2} dz = \frac{1}{2}. \qquad (36)$$