

The kaobook class

Appunti di Metodi Matematici della Fisica

Andrea Maselli e gli studenti del canale A-F

A.A. 2019-2020

Sapienza Università' di Roma

June 24, 2020

Pao Publishing

The kaobook class

Disclaimer

Queste note (per ora zeppe di errori) sono state redatte lezione dopo lezione durante il corso di metodi dell'anno accademico 2019/2020, con il supporto degli studenti del corso. Ben lontani da essere un manuale, esse si propongono come guida degli argomenti trattati del corso

No copyright

© These notes are released into the public domain using the CC0 code. To the extent possible under law, I waive all copyright and related or neighbouring rights to this work. To view a copy of the CC0 code, visit:

<http://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/>

Colophon

This document was typeset with the help of `KOMA-Script` and \LaTeX using the `kaobook` class.

The source code of this book is available at:

<https://github.com/fmarotta/kaobook>

(You are welcome to contribute!)

Publisher

First printed in May 2019 by Pao Publishing

Contents

Contents	iii
1 Funzioni elementari di variabili complessa	1
1.1 Radice e potenza	1
2 Integrazione nel campo complesso	2
2.1 Curve regolari e rettificabili	2
2.2 Somme parziali e integrale	3
2.3 Il teorema di Cauchy	6
Il teorema di Cauchy secondo Goursat	6
2.4 L'esistenza della primitiva	9
2.5 Il caso dei domini molteplicemente connessi	10
Numero di avvolgimenti	12
2.6 La formula integrale di Cauchy	13
Teorema della media	14
Derivata n-esima di una funzione analitica	15
Teorema del massimo (minimo) modulo	16
Primo teorema di Liouville	17
Secondo teorema di Liouville	17
Teorema di Morera	17
2.7 Integrazioni su archi infiniti e infinitesimi	18
2.8 Il lemma di Jordan	20
3 Serie	21
3.1 Tipi di convergenza	21
3.2 L'importanza di essere uniforme	24
3.3 Il Teorema di Cauchy-Hadamard	25
3.4 Il teorema di Taylor	27
3.5 Serie di Laurent	32
4 Residui	37
4.1 Punti singolari	37
4.2 Il teorema dei residui	39
Calcolo dei residui	41
4.3 Il residuo all'infinito	41
4.4 Il residuo logaritmico	45

5	Integrali con i residui	49
5.1	Integrali trigonometrici	49
	Integrali sull'asse reale	51
5.2	Integrali di Fourier	54
5.3	Integrali di funzioni polidrome	57
	Integrali del tipo $\int_0^\infty x^\alpha f(x)dx$ con $\alpha \in \mathbf{R}$	57
	Integrali del tipo $\int_0^\infty f(x) \log^n(x)dx$	60
	Integrali del tipo $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{(1-x)^\alpha} f(x)dx$	64
	Integrali del tipo $\int_0^\infty x^\alpha \log(x) f(x)dx$	67
5.4	Integrali impropri con singolarita' sull'asse reale	69
5.5	La trasformata di Laplace inversa	74
5.6	Gli integrali di Fresnel	77
5.7	La trasformata di Fourier della Gaussiana	78

List of Figures

2.1	Partizione di una curva $z(t)$ con $t \in [a, b]$	2
2.2	Curva di Koch per $n = (0, 1, 2, 4)$ iterazioni.	3
2.3	Partizione sulla curva $z(t)$ usata per definire la somma integrale (2.4).	4
2.4	Triangolo Δ dominio di analiticit� della funzione $f(z)$ usato per la prima dimostrazione del teorema di Goursat.	6
2.5	Poligonale chiusa usato per la seconda dimostrazione del teorema di Goursat.	8
2.6	(Top) Curva chiusa rettificabile considerata per la terza dimostrazione del teorema di Goursat. (Bottom) Ingrandimento del dominio ξ di spessore 2ρ	8
2.7	Percorso chiuso in un dominio semplicemente connesso.	9
2.8	Dominio moltiplicemente connesso.	10
2.9	Cammini scelti per risolvere l'esercizio (2.5.1).	12
2.10	Cammini di integrazione dell'esercizio 2.5.2.	13
2.11	Dominio utilizzato per la dimostrazione della formula integrale di Cauchy.	14
2.12	Modulo di $f(z) = \cos z$ e di $f(z) = e^{z/2}$ per valori di z appartenenti al cerchio unitario.	16
3.1	Implicazioni tra le propriet� di convergenza di una serie di funzioni. Le frecce non sono reversibili.	22
3.2	(Pannello superiore) Convergenza della serie geometrica in $\tilde{z} = 0.8e^{i\pi/3}$ al variare dei termini della somma parziale $f_n(z)$ all'interno di una circonferenza di raggio $\epsilon = 0.04$ centrata in $f(\tilde{z}) = \frac{1}{1-\tilde{z}}$. (Pannello inferiore) Esempi di serie geometrica al variare di $f_n(z)$ per diversi punti $ z < 1$	23
3.3	Costruzione geometrica utilizzata per dimostrare il teorema di Taylor. La funzione $f(z)$ e' analitica nel dominio $ z - z_0 < R$	29
3.4	Dominio di convergenza, $ z < 1$ per la serie calcolata nell'esercizio 3.4.2.	31
3.5	Dominio di convergenza, $ z - z_0 < 4$ dell'espansione in serie dell'esercizio 3.4.4.	31
3.6	Corona circolare $r < z - z_0 < R$ in cui e' contenuto il cammino $C_{1,2,3,4}$ su cui e' svolto l'integrale (3.34).	33
3.7	(Pannello superiore) Regioni di convergenza (a) e (b) dell'esercizio (3.5.1). i punti neri corrispondono alle singolarit� della funzione, $z = 2$ e $z = 6$. (Pannelli centrali) Convergenza della funzione dell'esercizio (3.5.1) all'aumentare del numero di termini della serie, per diversi punti appartenenti al dominio di convergenza (a) (b) e (c) discussi nell'esercizio. Si noti come all'avvicinarsi di z ad una delle singolarit� e' necessario considerare molti piu' termini nella sommatoria per arrivare vicini alla convergenza, data dalle linee tratteggiate orizzontali.	35
4.1	Rappresentazione di un dominio chiuso contenente un numero finito n di singolarit� $z_{j=1,\dots,n}$, ciascuna circondata da un cammino arbitrario γ_j . Notare che cammino esterno e cammini interni sono percorsi in senso opposto.	40
4.2	Rappresentazione dei piani z e τ , e di come i punti nel piano s <i>muovono</i> a causa dl cambio di variabile $z = 1/\tau$	42
5.1	Contorno chiuso composto dal segmento $[-R, R]$ e da quello dalla semi circonferenza C_R usato nel teorema (5.1.1). Il cammino puo' essere chiuso sopra (verde) o sotto (giallo), ma il verso di percorrenza cambia.	51

5.2	Contorni chiuso su cui vengono effettuati gli integrali a) dell'esercizio (5.1.3), e singolarita della funzione integranda.	52
5.3	Schermata iniziale del videogame Pacman.	57
5.4	Contorno Pacman su cui integriamo la funzione (5.25).	58
5.5	Cammino di integrazione per la funzione $f(z) \log(z)$	63
5.6	Cammino a <i>dumbell</i> per il calcolo dell'integrale (5.48).	65
5.7	Taglio relativo al cammino a <i>dumbell</i> usato per l'esercizio 5.3.5.	66
5.8	Cammini di integrazione passanti sopra e sotto una singolarita' z_0 sull'asse reale. 69	
5.9	Arco di circonferenza attorno ad una singolarita' isolata z_0	70
5.10	Cammino usato per l'integrale a valore principale dell'esercizion (5.4.1).	73
5.11	Contorni di Bromwich (sinistra) e Hankel (destra) usati per integrale la trasfor- mata di Laplace inversa (5.83).	76
5.12	Andamento numerico degli integrali di Fresnel al variare dell'estremo di integrazione x	77
5.13	Percorso di integrazione per il calcolo degli integrali di Fresnel $S(x)$ e $C(x)$ nel limite $x \rightarrow \infty$	78
5.14	Percorso di integrazione per il calcolo della trasformata di Fourier della gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$	78

List of Tables

Funzioni elementari di variabili complessa

1

In questo capitolo discuteremo in dettaglio le proprietà di alcune funzioni elementari nel piano complesso, che richiedono particolari *attenzioni*. In particolare andremo a considerare diversi esempi di funzioni polidrome, ossia funzioni a più valori, e il concetto di *taglio* del piano complesso, come strumento per renderle *monodrome*, o a singolo valore.

1.1 Radice e potenza 1

1.1 Radice e potenza

Integrazione nel campo complesso

2

2.1 Curve regolari e rettificabili

Prima di discutere in modo rigoroso il concetto di integrazione nel piano complesso, andiamo a fare alcuni richiami su alcuni concetti base relativi alle curve. Dati due punti (a, b) , definiamo una curva regolare, o differenziabile, $z(t)$ come

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad t \in [a, b] \quad \text{tale che} \quad x(t), y(t) \in C^1[a, b]. \quad (2.1)$$

Alcune volte parleremo di curve *regolari a tratti*, ossia date dall'unione di curve ciascuna delle quali differenziabile, ma che nel loro insieme possono presentare cuspidi o punti angolosi. Se $f(a) = f(b)$ allora la curva si dice chiusa. Inoltre, se $x(t), y(t)$ sono iniettive, ossia dati due punti distinti $(w_1, w_2) \in (a, b)$ risulta $f(w_1) \neq f(w_2)$, la curva si dice semplice*. Una curva chiusa semplice e' detta di *Jordan*. Esempi di curve regolari e iniettive sono:

- ▶ L'arco di circonferenza $z(t) = Re^{it}$, con $t \in [0, \pi]$, $R > 0$.
- ▶ Il segmento $z(t) = z_2 + (1 - t)z_1$, con $t \in [0, 1]$.
- ▶ Il tratto di parabola $z(t) = t + it^2$, $t \in [0, 1]$

La la curva $z(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, 3\pi]$ non e' iniettiva.

Andiamo dunque a definire il concetto di *rettificabilita'*. Consideriamo una curva in un intervallo $[a, b]$ e scegliamo una partizione ρ , ossia un insieme di punti che dividono il dominio in sottointervalli:

$$\rho = \{t_i \in [a, b] : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\},$$

con $\{z_0 = z(a), z_1 = z(t_1) \dots, z_n = z(b)\}$. La lunghezza della poligonale data dall'unione dei segmenti che congiungono i punti della partizione e' data da:

$$L = \sup(|z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \dots + |z_n - z_{n-1}|). \quad (2.2)$$

Se $L < \infty$ la curva si dice rettificabile, e inoltre la lunghezza e' equivalente all'integrale

$$L = \int ds = \int_{z_0}^{z_n} |dz| = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt < \infty, \quad (2.3)$$

con ds ascissa curvilinea. Notiamo che se la curva e' regolare, essa e' rettificabile, ma non e' necessariamente vero il contrario.

Nota 2.1.1 Un classico esempio di curva non rettificabile e' dato dalla curva di Koch, che rappresenta storicamente uno dei primi modelli di

2.1 Curve regolari e rettificabili . . .	2
2.2 Somme parziali e integrale . . .	3
2.3 Il teorema di Cauchy	6
Il teorema di Cauchy secondo Goursat	6
2.4 L'esistenza della primitiva . . .	9
2.5 Il caso dei domini molteplicemente connessi	10
Numero di avvolgimenti . . .	12
2.6 La formula integrale di Cauchy	13
Teorema della media	14
Derivata n-esima di una funzione analitica	15
Teorema del massimo (minimo) modulo	16
Primo teorema di Liouville . .	17
Secondo teorema di Liouville	17
Teorema di Morera	17
2.7 Integrazioni su archi infiniti e infinitesimi	18
2.8 Il lemma di Jordan	20

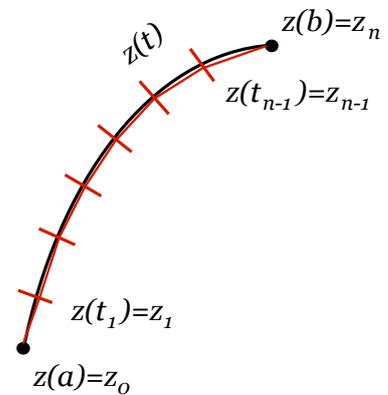


Figure 2.1: Partizione di una curva $z(t)$ con $t \in [a, b]$.

* La curva non ha auto-intersezioni a meno del punto iniziale e finale, per cui $f(a) = f(b)$.

frattali, proposta nel 1904 dal matematico svedese Heige Von Koch. La curva di Koch si ottiene seguendo un algoritmo specifico che consiste nei seguenti punti: (i) dividere la curva di lunghezza iniziale l_0 in tre segmenti uguali, (ii) cancellare il segmento centrale sostituendolo con un triangolo con i lati di lunghezza pari a quello eliminato, (iii) ripetere il punto (i) per ciascuno dei nuovi segmenti. La Figura (2.2) fornisce un esempio dell'algoritmo a vari step. Notiamo che data l_n la lunghezza totale della curva allo step n -esimo:

$$\begin{aligned} \ell_0 &= l_0 \quad \text{step 0} \\ \ell_1 &= \frac{4}{3}l_0 \quad \text{step 1} \\ \ell_2 &= \frac{16}{9}l_0 \quad \text{step 2} \\ &\vdots \\ \ell_n &= \left(\frac{4}{3}\right)^n l_0 \quad \text{step } n . \end{aligned}$$

La lunghezza dunque tende ad infinito nel limite $n \rightarrow \infty$. La curva di Koch e' continua ma non derivabile. Infatti, se lo fosse in un punto x_0 , avvicinandosi sempre piu' nell'intorno del punto la curva tenderebbe ad una retta passante per x_0 . Mentre la curva di Koch vista a scale diverse e' sempre identica a se stessa.

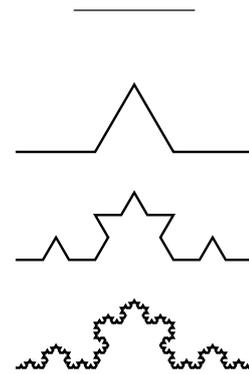


Figure 2.2: Curva di Koch per $n = (0, 1, 2, 4)$ iterazioni.

2.2 Somme parziali e integrale

Andiamo a definire in modo rigoroso l'integrale di una funzione $f(z)$ continua. Sia $z(t) = x(t) + iy(t)$ l'equazione parametrica di una curva γ , con $t \in [a, b]$. Scegliamo una partizione qualunque in questo intervallo, a cui corrisponde una partizione di archi $\gamma_{k=1, \dots, n}$ come in Figura 2.4. Sia inoltre $J_k = z(r_k) \in \gamma_k$, con r_k punto arbitrario nel segmento tra z_{k-1} e z_k .

Definiamo la somma integrale¹:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \sum_{k=1}^n f(j_k)(z_k - z_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n [u(a_k, b_k)(x_k - x_{k-1}) - v(a_k, b_k)(y_k - y_{k-1})] \\ &\quad + i \sum_{k=1}^n [u(a_k, b_k)(y_k - y_{k-1}) + v(a_k, b_k)(x_k - x_{k-1})] . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Introdotta $\mu = \max |t_k - t_{k-1}|$, se la $f(z)$ e continua (e dunque lo sono $u(x, y)$ e $v(x, y)$) e la curva e' rettificabile allora possiamo passare al limite $\mu \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n(\mu)} f(j_k)(z_k - z_{k-1}) &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx) \\ &\equiv \int_{\gamma} f(z) dz , \end{aligned} \quad (2.5)$$

1: Usiamo la seguente notazione:

$$\begin{aligned} f &= u(x, y) + iv(x, y) \\ J_k &= a_k + ib_k \\ z_k &= x_k + iy_k . \end{aligned}$$

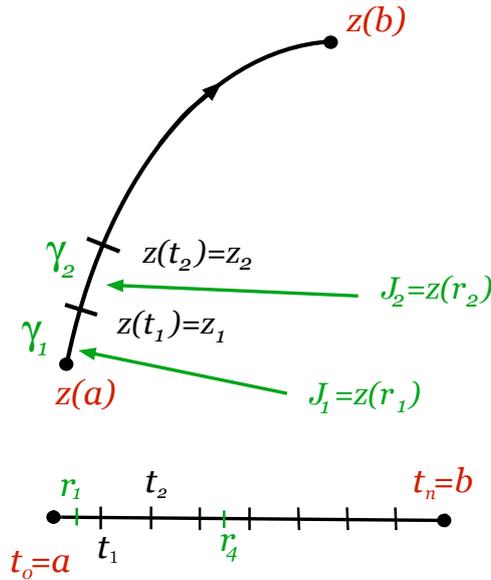


Figure 2.3: Partizione sulla curva $z(t)$ usata per definire la somma integrale (2.4).

con $n(\mu)\mu$ finito per $\mu \rightarrow 0$. La somma dunque tende ad un limite preciso che e' proprio l'integrale di una funzione continua su una curva regolare. Vediamo alcune proprieta' dell'integrale appena definito.

- Presa una curva γ_1 coincidente con γ ma percorsa in senso contrario si ha

$$\int_{\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma_1} f(z)dz . \quad (2.6)$$

- Date due funzioni $f(z)$ e $g(z)$ e due numeri complessi $(a, b) \in \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma} [af(z) + bg(z)] dz = a \int_{\gamma} f(z)dz + b \int_{\gamma} g(z)dz . \quad (2.7)$$

- Prese due curve γ_1, γ_2 , con il secondo estremo di γ_1 che coincide con il primo di γ_2 si ha:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz . \quad (2.8)$$

- Vale la seguente disuguaglianza²

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| = \int_{\gamma} |f(z)| ds . \quad (2.9)$$

Abbiamo infatti che

$$\left| \sum_{k=1}^{n(\mu)} f(j_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^{n(\mu)} |f(j_k)| |z_k - z_{k-1}| , \quad (2.10)$$

e passando al limite $\mu \rightarrow 0$ otteniamo la disuguaglianza integrale.

- Se γ e' una curva di lunghezza finita L e $M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$ allora vale la disuguaglianza di Darboux:

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq ML . \quad (2.11)$$

2: Ricordiamo che ds e' l'ascissa curvilinea, ossia la lunghezza dell'elemento infinitesimo di curva

$$ds = |dz| = |dx + idy| = \sqrt{dx^2 + dy^2} .$$

La dimostrazione e' immediata usando la proprieta' (2.9) e maggiorando il modulo della funzione con M .

- Infine, se la curva $z(t)$ e' differenziabile a tratti, allora il calcolo dell'integrale definito di una funzione complessa si riconduce a quello di una funzione complessa di variabile reale, ossia dato $dz = z(t+dt) - z(t) = z'(t)dt$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt, \quad (2.12)$$

con (a, b) estremi della curva γ .

Andiamo a vedere alcuni esempi espliciti di integrali di funzioni complesse.

Esempio 2.2.1 Calcolare l'integrale di $f(z) = z$ su una curva qualsiasi. Per farlo utilizziamo la definizione di somma integrale (2.4). Consideriamo due possibili scelte per J_k , date da $J_k^{(1)} = z_{k-1}$ e $J_k^{(2)} = z_k$, tali che in corrispondenza:

$$S^{(1)} = \sum_{k=1}^n z_{k-1}(z_k - z_{k-1}) \quad , \quad S^{(2)} = \sum_{k=1}^n z_k(z_k - z_{k-1}).$$

Dato che per $\mu \rightarrow 0$ $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ devono convergere entrambi all'integrale $\int_{\gamma} f(z)dz$, lo stesso deve valere per la loro media aritmetica:

$$\begin{aligned} \frac{S^{(1)} + S^{(2)}}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ &= \frac{1}{2} [(z_1^2 - z_0^2) + (z_2^2 - z_1^2) + \dots] = \frac{z_n^2}{2} - \frac{z_0^2}{2}, \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\int_{\gamma} z dz = \frac{1}{2}(z_n^2 - z_0^2).$$

Notiamo che l'integrale e' indipendente dalla curva γ , e nel caso in cui il percorso sia chiuso esso si annulla. In modo analogo possiamo dimostrare che

$$\int_{\gamma} z^p dz = \frac{z_n^{p+1}}{p+1} - \frac{z_0^{p+1}}{p+1} \longrightarrow \oint_{\gamma} z^p dz = 0 \quad (p > 0).$$

Esempio 2.2.2 Calcoliamo l'integrale della funzione $f(z) = \frac{1}{z-a}$, scegliendo come curva γ un arco di circonferenza centrato in $z = a$ e raggio ρ , ossia $z(t) = a + \rho e^{it}$ con $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. In questo caso $z'(t) = i\rho e^{it}$:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{t_0}^{t_0+\alpha} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}} dt = i\alpha.$$

Se γ e' tutta la circonferenza allora

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Gli esempi svolti ci suggeriscono una relazione non banale tra l'integrale

di una funzione su una curva chiusa e l'analiticità di tale funzione. Da quanto visto infatti, per i polinomi in z l'integrale su una qualsiasi curva chiusa risulta nullo, mentre l'integrale di $f(z) = 1/(z - a)$ lungo un cerchio centrato in a e diverso da zero. Nel primo caso la $f(z)$ è analitica all'interno del dominio racchiuso dalla curva, nel secondo no.

2.3 Il teorema di Cauchy

I risultati visti sin qui ci suggeriscono una connessione tra l'integrale di una funzione lungo una curva, e l'analiticità della funzione nel dominio racchiuso dalla curva. Tale connessione è formalizzata dal *teorema di Cauchy*, che rappresenta il pilastro fondamentale dell'analisi complessa.

Teorema 2.3.1 *Data una funzione $f(z)$ analitica in un dominio semplicemente connesso \mathcal{D} , allora*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0, \tag{2.13}$$

lungo una qualunque curva chiusa γ , rettificabile e contenuta in \mathcal{D} .

Ne daremo una prima dimostrazione tramite il lemma di Green³. Supponiamo che $f'(z)$ sia continua: di conseguenza lo saranno anche le derivate parziali di $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ rispetto a x e y (e lo stesso per u e v). Dalla definizione dell'integrale di $f(z)$ data nella (2.5) si ha immediatamente:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z)dz &= \oint_{\gamma} (u dx - v dy) + i \oint_{\gamma} (u dy + v dx) \\ &= \int_S dx dy \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + i \int_S dx dy \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

in cui nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato le condizioni di Cauchy-Riemann $u_y = -v_x$ e $v_y = u_x$. Notiamo che il procedimento si basa sull'assunzione cruciale che la derivata prima di $f(z)$ sia continua. Una dimostrazione senza questo *caveat* è quella data da Goursat, che andremo a studiare ora.

Il teorema di Cauchy secondo Goursat

Andremo a dimostrare il teorema di Cauchy per una curva rettificabile, secondo il procedimento elaborato da Goursat in tre step.

1. Consideriamo innanzitutto un triangolo Δ interamente contenuto in un dominio \mathcal{D} semplicemente connesso. Per il teorema di Cauchy, l'integrale chiuso lungo il perimetro si annulla. Suddividiamo Δ in 4 triangoli più piccoli, come mostrato in Figura 2.4, ottenuti congiungendo con dei segmenti i punti medi di Δ . Supponiamo inoltre che per assurdo:

$$\left| \oint_{\partial\Delta} f(z)dz \right| = M > 0, \tag{2.15}$$

3: Il lemma di Green ci dice che date due funzioni $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sono continue in \mathcal{B} semplicemente connesso, e hanno derivate prime continue, allora

$$\oint_{\gamma} (P dx + Q dy) = \int_S dx dy \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right),$$

con γ curva chiusa qualunque, rettificabile e contenuta in \mathcal{B} , e S porzione di dominio delimitata da γ .

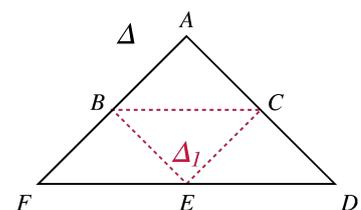


Figure 2.4: Triangolo Δ dominio di analiticità della funzione $f(z)$ usato per la prima dimostrazione del teorema di Goursat.

da cui, sfruttando le proprietà degli integrali:

$$M = \left| \oint_{\partial\Delta} f(z) dz \right| = \left| \sum_{i=1,4} \oint_{\partial\Delta_i} f(z) dz \right| \leq \sum_{i=1,4} \oint_{\partial\Delta_i} |f(z) dz| .$$

Dalla precedente si vede che per almeno uno dei triangoli più piccoli, che chiameremo Δ_1 :

$$\oint_{\partial\Delta_1} |f(z) dz| \geq \frac{M}{4} .$$

Applichiamo ora in modo iterativo il procedimento di suddivisione in sotto-triangoli a Δ_1 . Con lo stesso procedimento visto prima possiamo individuare un Δ_2 tale che

$$\oint_{\partial\Delta_2} |f(z) dz| \geq \frac{M}{4^2} . \quad (2.16)$$

In questo modo possiamo costruire una successione di triangoli ciascuno contenuta nella precedente, $\Delta \supset \Delta_1 \supset \dots \Delta_n$ e tale che

$$\oint_{\partial\Delta_n} |f(z) dz| \geq \frac{M}{4^n} . \quad (2.17)$$

Inoltre, dato l il perimetro di Δ , all' n -esima iterazione⁴ $l_n = \frac{l}{2^n}$. Prendiamo infine un punto ζ appartenente a tutti i triangoli. Se $f(z)$ è analitica in ζ , allora per definizione $\forall \epsilon > 0$ esiste un $\delta_{(\zeta, \epsilon)} > 0$ tale che se $|z - \zeta| < \delta_{(\zeta, \epsilon)}$ allora

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \epsilon , \quad (2.18)$$

da cui dato lo sviluppo della funzione attorno a z , $f(z) = f(\zeta) + f'(\zeta)(z - \zeta) + \eta(\zeta, z)(z - \zeta)$ ricaviamo che $|\eta(\zeta, z)| < \epsilon$. D'altro canto, esiste sempre un n_0 tale che per $n > n_0$ il triangolo Δ_n è contenuto all'interno del cerchio $|z - \zeta| < \delta_{(\zeta, \epsilon)}$ per cui⁵:

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| &= \left| \oint_{\partial\Delta_n} [f(\zeta) + (z - \zeta)f'(\zeta)] + \eta(z, \zeta)(z - \zeta) dz \right| \\ &= \left| \oint_{\partial\Delta_n} \eta(z, \zeta)(z - \zeta) dz \right| < \epsilon \oint_{\partial\Delta_n} |z - \zeta| dz \\ &\leq \epsilon l_n \sup_{z \in \Delta_n} |z - \zeta| \leq \epsilon l_n^2 = \frac{\epsilon l^2}{4^n} , \end{aligned} \quad (2.19)$$

in cui il precedente sup si ottiene quando ζ e z sono i vertici del lato più lungo di Δ_n , che è sicuramente minore di l_n . In conclusione dalle equazioni (2.16) e (2.19)

$$\frac{M}{4^n} \leq \left| \oint_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \frac{\epsilon l^2}{4^n} \rightarrow M \leq \epsilon l^2 \quad \forall \epsilon > 0 . \quad (2.20)$$

ossia $M = 0$.

Notiamo che la dimostrazione fatta fin qui si basa solo sull'assunzione che $f(z)$ sia analitica in Δ , e che Δ sia chiuso, limitato e decomponibile in un numero finito di sotto-triangoli con perimetro arbitraria-

4: Il perimetro di ogni triangolo è la metà del precedente. Ad esempio dalla Figura 2.4 notiamo che i triangoli Δ e $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ sono simili, come Δ e $\hat{D}\hat{C}\hat{E}$, da cui $\hat{D}\hat{C} = \hat{D}\hat{A}/2$, $\hat{C}\hat{E} = \hat{A}\hat{F}/2$ e $\hat{E}\hat{D} = \hat{F}\hat{D}/2$.

5: Ricordiamo che gli esempi (2.2.1) dimostrano che lungo un percorso chiuso l'integrale di $f(z) = 1$ e $f(z) = z$ si annullano.

mente piccolo.

2. Come secondo step, dimostriamo il teorema di Cauchy per una poligonale chiusa P contenuta in \mathcal{D} con n lati, come mostrato in Fig. (2.5). Dato il perimetro P_n , esiste una diagonale che divide P in due sotto-poligoni, con numero di lati inferiore a n , ossia:

$$\oint_P f(z)dz = \oint_{P_1} f(z)dz + \oint_{P_2} f(z)dz. \quad (2.21)$$

Iterando il procedimento possiamo decomporre il poligono in un insieme di triangoli tali che

$$\oint_P f(z)dz = \dots = \sum_i \oint_{\partial\Delta_i} f(z)dz = 0, \quad (2.22)$$

in cui la somma si annulla data la dimostrazione fatta al punto 1.

3. Come ultimo step della dimostrazione consideriamo una curva γ come quella in Fig. 2.6. Dato $\rho > 0$ piccolo e finito, definiamo l'insieme chiuso e limitato ξ tale che

$$\gamma \subset \xi \subset \mathcal{D} \quad e \quad z \in \xi \rightarrow d(z, \gamma) \leq \rho. \quad (2.23)$$

L'insieme ξ rappresenta una striscia chiusa di spessore 2ρ . La funzione $f(z)$ e' analitica in ξ , e dato che quest'ultimo e' compatto essa e' al suo interno uniformemente continua, ossia $\forall \epsilon > 0$ esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che se $|\zeta_1 - \zeta_2| < \delta_\epsilon$ allora $|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| < \epsilon$, per ogni $\zeta_{1,2} \in \xi$.

Introduciamo ora una poligonale chiusa P di vertici $z_0, \dots, z_n \in \gamma$ tale che $\max_{\{k=1, n\}} \ell_k < \min(\rho, \delta_\epsilon)$, con ℓ_k lunghezza dell'archetto γ_k . Di conseguenza la lunghezza del segmento k -esimo $|P_k| \leq \ell_k < \rho$, ossia tutti i punti della poligonale apparterranno a ξ . Avremo dunque che (ricordando che l'integrale su una poligonale chiusa e' nullo per la dimostrazione precedente):

$$\begin{aligned} \left| \oint_\gamma f(z)dz \right| &= \left| \oint_\gamma f(z)dz - \oint_P f(z)dz \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\oint_{\gamma_k} f(z)dz - \oint_{P_k} f(z)dz \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \oint_{\gamma_k} f(z)dz - \oint_{P_k} f(z)dz \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \oint_{\gamma_k} [f(z) - f(z_k)]dz + \oint_{P_k} [f(z_k) - f(z)]dz \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left| \oint_{\gamma_k} [f(z) - f(z_k)]dz \right| + \left| \oint_{P_k} [f(z) - f(z_k)]dz \right| \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{z \in \gamma_k} |f(z) - f(z_k)| \ell_k + \sum_{z \in P_k} |f(z) - f(z_k)| |P_k| \right) \\ &< \epsilon \sum_{k=0}^{n-1} (\ell_k + |P_k|) \leq 2\epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \ell_k = 2\epsilon \ell \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

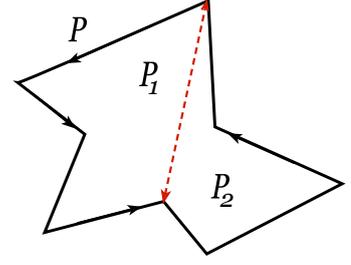


Figure 2.5: Poligonale chiusa usato per la seconda dimostrazione del teorema di Goursat.

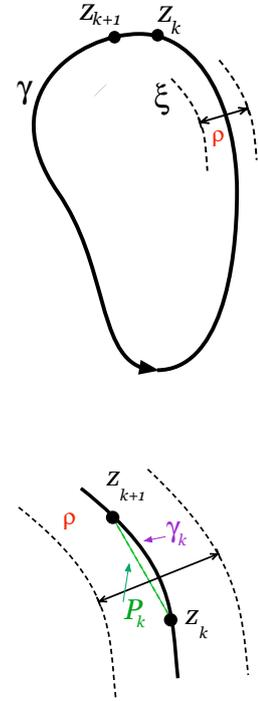


Figure 2.6: (Top) Curva chiusa rettificabile considerata per la terza dimostrazione del teorema di Goursat. (Bottom) Ingrandimento del dominio ξ di spessore 2ρ .

in cui ℓ e' la lunghezza, finita, di γ . Con quest'ultimo passaggio abbiamo dunque concluso la procedura di Goursat, portando a termine la dimostrazione del teorema di Cauchy per una curva qualsiasi rettificabile.

Andiamo ad esplorare alcune conseguenze dirette del teorema di Cauchy

2.4 L'esistenza della primitiva

Un risultato immediato del teorema di Cauchy e' che, data una $f(z)$ analitica in un dominio semplicemente connesso, l'integrale della funzione tra due punti z_0 e z e' indipendente dalla curva scelta che collega i due punti. La dimostrazione di questo enunciato e' immediata. Consideriamo una curva chiusa γ come mostrata in Figura 2.7: dall'equazione (2.13)

$$0 = \oint_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma_2} f(z)dz , \tag{2.25}$$

da cui

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz . \tag{2.26}$$

Il risultato appena trovato ha una conseguenza fondamentale. Se l'integrale di linea non dipende dal cammino tra punto iniziale e finale, allora deve esistere una funzione $F(z)$ tale che

$$\int_A^B f(z)dz = F(B) - F(A) .$$

Riconosciamo in $F(z)$ la funzione anti-derivata, o primitiva. Vale dunque il seguente teorema:

Teorema 2.4.1 *Data una funzione $f(z)$ analitica in un dominio \mathcal{D} semplicemente connesso, che soddisfi il teorema di Cauchy, e fissato un punto $z_0 \in \mathcal{D}$, e' possibile definire una funzione univoca*

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta , \tag{2.27}$$

che sia la primitiva di $f(z)$, ossia tale che $F'(z) = f(z)$.

Per la dimostrazione, consideriamo il rapporto incrementale tra i punti z e $z + h$, entrambi in \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta + \int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta , \end{aligned} \tag{2.28}$$

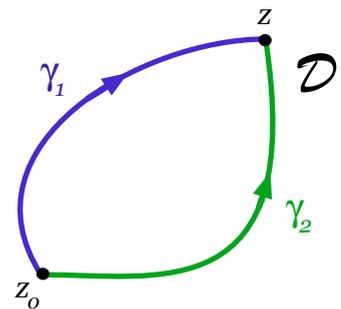
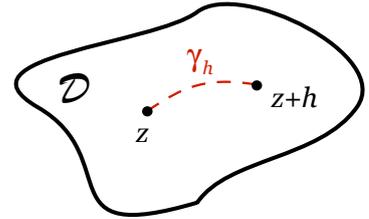


Figure 2.7: Percorso chiuso in un dominio semplicemente connesso.

da cui

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(\zeta) d\zeta - f(z)] \right| \leq \max_{\zeta \in \gamma_h} |f(\zeta) - f(z)|, \quad (2.29)$$



con γ_h curva che collega z e $z+h$. Dato che $f(z)$ e' continua allora e' possibile trovare un δ piccolo tale che per $|h| < \delta$ si ha $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$, infinitesimo.

Notiamo che due primitive di una stessa funzione $f(z)$ differiscono sempre per una costante additiva.

2.5 Il caso dei domini molteplicemente connessi

Possiamo a questo punto chiederci cosa succeda nel caso di domini molteplicemente connessi, e in particolare se il teorema di Cauchy abbia ancora un senso, e piu' in generale se sia possibile trovare una connessione tra analiticita' di una funzione e il suo integrale di linea. La risposta a questa domanda e' che e' possibile, con alcune accortezze, estendere il teorema (2.3.1) al caso con domini con uno o piu' buchi.

Andiamo a considerare per prima il caso piu' semplice mostrato in Figura 2.8, con γ_1 curva chiusa percorsa in senso antiorario, che circonda un buco. Sia inoltre la curva Γ data dalla composizione dei cammini $\gamma \cup \delta_1^+ \cup \delta_1^- \cup \gamma_1$, in cui i segmenti δ_1^\pm , percorsi in senso inverso, connettono cammino esterno ed interno[†], e γ_1 appartenente a Γ e' percorso in senso orario.

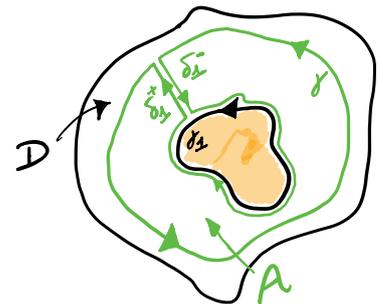


Figure 2.8: Dominio molteplicemente connesso.

La curva Γ contorna il dominio \mathcal{A} semplicemente connesso, e dunque per il teorema di Cauchy:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\delta_1^+} f(z) dz + \int_{\delta_1^-} f(z) dz + \int_{-\gamma_1} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

da cui ricaviamo che gli integrali sulle curve γ e γ_1 coincidono.

Possiamo generalizzare questo esempio al caso di un dominio molteplicemente connesso con n buchi. Avremo:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{i=1}^n \int_{\delta_i^+} f(z) dz + \sum_{i=1}^n \int_{\delta_i^-} f(z) dz \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{-\gamma_i} f(z) dz \end{aligned}$$

[†] I domini γ_1 verde e nero coincidono, e sono distinti in figura solo per motivi grafici.

da cui otteniamo

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)dz . \quad (2.31)$$

La relazione precedente, di fondamentale importanza, ci dice che per un dominio molteplicemente connesso, il calcolo dell'integrale su una curva chiusa puo' essere ricondotto alla somma di n integrali su n curve chiuse regolari γ_i che non si intersecano tra loro, ciascuna delle quali delimitante il buco i -esimo, e percorsa in senso antiorario.

Andiamo a vedere come applicare quanto visto al calcolo esplicito di alcuni integrali.

Esempio 2.5.1 Calcolare il valore dei seguenti integrali:

$$\begin{aligned} a) \int_1^{2i} z^n dz \quad (n \in \mathbf{N}^+) , \quad b) \int_2^{2i} |z| dz , \\ c) \int_1^i z^{1/2} dz , \quad d) \int_1^i \frac{dz}{z} . \end{aligned} \quad (2.32)$$

a) Abbiamo a disposizione due strade possibili: (i) usare il teorema della primitiva, (ii) effettuare il calcolo su un cammino specifico. I risultati devono coincidere. Nel primo caso, data la primitiva $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ si ha immediatamente

$$I = \frac{(2i)^{n+1} - 1}{n+1} .$$

Per la seconda strategia consideriamo due cammini distinti, dimostrando che il risultato e' indipendente dalla curva. Siano γ_1 e γ_2 i due percorsi mostrati nella Figura 2.9. Avremo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} z^n dz = \int_0^1 x^n dx + \int_0^2 (iy)^n idy \\ &= -\frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 + i^{n+1} \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^2 = \frac{(2i)^{n+1} - 1}{n+1} = I , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\gamma_2} z^n dz = \int_0^{\pi/2} e^{int} i e^{it} dt + \int_1^2 (iy)^n idy \\ &= \frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \Big|_0^{\pi/2} + i^{n+1} \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_1^2 = \frac{(2i)^{n+1} - 1}{n+1} = I . \end{aligned}$$

b) In questo caso non esiste la primitiva, e non vale il teorema di Cauchy. Dunque possiamo eseguire l'integrale solo sul cammino assegnato. Se prendiamo una curva data da un arco di circonferenza $z(t) = 2e^{it}$ con $t \in [0, \pi/2]$ si ha:

$$I = \int_0^{\pi/2} 2ie^{it} |2e^{it}| dt = 4i \int_0^{\pi/2} e^{it} dt = 4(i-1) .$$

E' utile provare a usare un cammino diverso, dato per esempio da due

spezzate tra $x \in [2, 0]$ e $y \in [0, 2]$. In questo caso:

$$I = \int_2^0 |x| dx + \int_0^2 i |iy| dy = 2(i - 1). \quad (2.33)$$

c) Consideriamo \sqrt{z} come una funzione monodroma nel piano tagliato. Sfruttando il teorema di Cauchy, come nel caso dell'esercizio a), possiamo calcolare il risultato in due modi. Usando la primitiva si ha

$$F(z) = \frac{2}{3} z^{3/2} \rightarrow I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{2}{3} \left(e^{i\frac{3}{4}\pi} - 1 \right).$$

In alternativa possiamo effettuare il conto esplicito, scegliendo come cammino un arco tra 0 e $\pi/2$ di raggio unitario:

$$\begin{aligned} \int_1^i \sqrt{z} dz &= \int_0^{\pi/2} e^{i\frac{\theta}{2}} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\pi/2} e^{i\frac{3}{2}\theta} d\theta \\ &= \frac{2}{3} e^{i\frac{3}{2}\theta} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} \left(e^{i\frac{3}{4}\pi} - 1 \right). \end{aligned}$$

d) Anche in questo caso usiamo la primitiva

$$I = \int_1^i \frac{dz}{z} = \log |i| + i \Delta \arg(z) = i \frac{\pi}{2},$$

o parametrizziamo il cammino, ad esempio $z(t) = e^{it}$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{i e^{it}}{e^{it}} dt = i \int_0^{\pi/2} dt = i \frac{\pi}{2}.$$

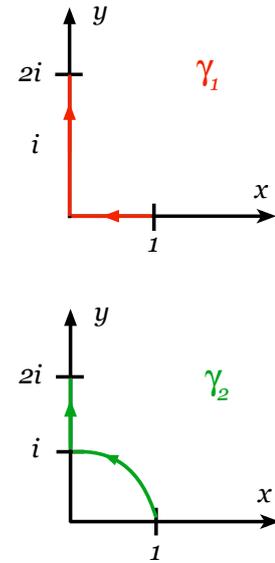


Figure 2.9: Cammini scelti per risolvere l'esercizio (2.5.1).

Numero di avvolgimenti

Abbiamo visto che se l'integrale di $f(z)$ lungo una qualsiasi curva chiusa si annulla, allora la primitiva e' una funzione monodroma e analitica. D'altro canto, se esiste un cammino chiuso γ tale che $\oint_{\gamma} f(z) dz \neq 0$, allora, come visto, esistono due curve $\gamma_{1,2}$ tali che

$$\int_{z_0, \gamma_1}^z f(z) dz \neq \int_{z_0, \gamma_2}^z f(z) dz, \quad (2.34)$$

ossia l'integrale e' una funzione polidroma, e il suo valore in particolare dipende dal numero di giri intorno alla parte connessa della frontiera del dominio di analicita' della $f(z)$, contenuta nel cammino chiuso in questione.

In generale, data Γ una curva rettificabile, anche con auto-intersezioni, contenuta nel dominio di analiticita' di $f(z)$, che circonda k parti connesse della frontiera del dominio, e data γ curva semplice, con gli stessi estremi di Γ , allora

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{i=1}^k n_i \oint_{\gamma_i} f(z) dz, \quad (2.35)$$

in cui $n_i \in \mathbf{Z}$ prende il nome di numero di avvolgimenti, e γ_i sono cammini chiusi, orientati positivamente, contenenti una sola parte connessa

della frontiera del dominio.

Esempio 2.5.2 Calcolare l'integrale di $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ sui due cammini mostrati in Figura 2.10.

Andiamo innanzitutto a scomporre l'integrale come

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{dz}{z+1}.$$

Nel caso del primo cammino consideriamo $\gamma = \sigma_1 + \sigma_2$. Su σ_2 , la circonferenza centrata in $z = 1$, si ha:

$$\frac{1}{2} \oint_{\sigma_2} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \oint_{\sigma_2} \frac{dz}{z+1} = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^0 \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = -i\pi,$$

in cui il secondo integrale si annulla per il teorema di Cauchy. Sul cammino σ_1 otteniamo:

$$\frac{1}{2} \int_{\sigma_1} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \int_{\sigma_1} \frac{dz}{z+1} = \frac{1}{2} [\log(z-1) - \log(z+1)]_{-i}^i = -i\frac{\pi}{2}.$$

Sommando i due contributi avremo in totale:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-1} = -\frac{3}{2}i\pi.$$

Il risultato appena trovato coincide con quanto dato dall'equazione (2.35), con $k = 1$, $n_k = -1$ e $\gamma_1 = \sigma_2$.

Passiamo all'integrale sul secondo cammino. Il contributo su σ_1 coincide con quanto già visto in precedenza, ossia

$$\frac{1}{2} \int_{\sigma_1} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \int_{\sigma_1} \frac{dz}{z+1} = -i\frac{\pi}{2}.$$

Andiamo a calcolare il valore degli integrali sui cammini circolari. Nei due avvolgimenti attorno a $z = 1$, compiuti in senso orario:

$$2 \oint_{\gamma(z=1)} \frac{dz}{z^2-1} = \oint_{\gamma(z=1)} \frac{dz}{z-1} - \oint_{\gamma(z=1)} \frac{dz}{z+1} = -2\pi i,$$

con il secondo integrale su $\frac{1}{z+1}$ nullo. Sui due avvolgimenti attorno a $z = -1$, percorsi in verso antiorario:

$$2 \oint_{\gamma(z=-1)} \frac{dz}{z^2-1} = \oint_{\gamma(z=-1)} \frac{dz}{z-1} - \oint_{\gamma(z=-1)} \frac{dz}{z+1} = -2\pi i,$$

in cui questa volta ad essere zero e' il primo dei due integrali. In conclusione, la somma tre contributi da $I = -2\pi i - 2\pi i - i\frac{\pi}{2} = -\frac{9}{2}i\pi$.

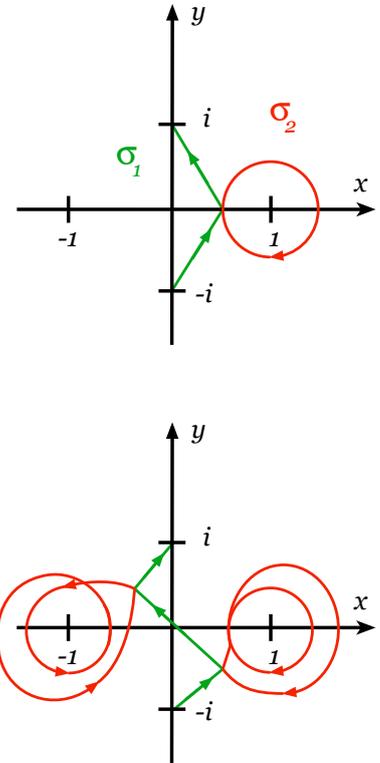


Figure 2.10: Cammini di integrazione dell'esercizio 2.5.2.

2.6 La formula integrale di Cauchy

Teorema 2.6.1 Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio \mathcal{D} semplicemente connesso e γ una curva chiusa in \mathcal{D} percorsa in senso antiorario, che

racchiude un dominio \mathcal{G} . Dato un punto $z_0 \in \mathcal{G}$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (2.36)$$

La formula (2.6.1) rappresenta uno degli ingredienti principali dell'analisi complessa, con innumerevoli conseguenze, che andremo ad esplorare in dettaglio. Per prima cosa però, andiamo a fornirne la dimostrazione. Consideriamo dunque un cerchietto γ_0 di raggio r , centrato in z_0 e contenuto in \mathcal{G} , come in Figura 2.11. Dal teorema di Cauchy avremo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} f(z_0) \oint_{\gamma_0} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dalla precedente si ha immediatamente

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi r}{r} \max_{z \in \gamma_0} |f(z) - f(z_0)|, \end{aligned} \quad (2.38)$$

per ogni r . Dato che il raggio del cerchio γ_0 è arbitrario possiamo sceglierlo piccolo a piacere, ed in particolare tale che quando z è molto vicino a z_0 , ossia $r = |z - z_0| < \delta$, si abbia $\max_{z \in \gamma_0} |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, con ϵ infinitesimo e fissato. Ciò conclude la nostra dimostrazione.

Notiamo che γ può coincidere con la frontiera del dominio ∂D , purché la $f(z)$ sia continua su di essa. In conclusione avremo:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 0 & z_0 \notin \bar{\mathcal{G}} \\ f(z_0) & z_0 \in \mathcal{G} \end{cases}. \quad (2.39)$$

Andiamo ad analizzare le conseguenze della formula integrale di Cauchy.

Teorema della media

Teorema 2.6.2 Se una funzione $f(z)$ è analitica nel cerchio di raggio R e centro z_0 , e continua sulla sua frontiera, il valore di $f(z)$ al centro è pari alla media aritmetica dei valori assunti lungo circonferenza.

Per la dimostrazione, data l'equazione della circonferenza $z - z_0 = Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, si ha

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta i R e^{i\theta}}{R e^{i\theta}} f(z_0 + R e^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned} \quad (2.40)$$

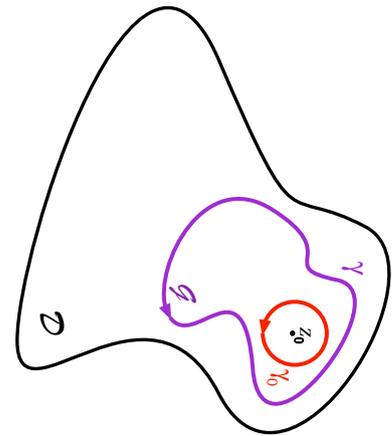


Figure 2.11: Dominio utilizzato per la dimostrazione della formula integrale di Cauchy.

L'ultimo integrale rappresenta proprio la media, data dal fattore $(2\pi)^{-1}$, dei valori assunti dalla $f(z)$ sulla circonferenza al variare di θ .

Derivata n-esima di una funzione analitica

Se $f(z)$ e' analitica in \mathcal{D} , essa ammette derivate di ogni ordine in z , $f^{(n)}(z)$, anch'esse analitiche in \mathcal{D} , che hanno la seguente rappresentazione integrale:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (2.41)$$

Una facile dimostrazione della precedente si ottiene derivando in modo esplicito la (2.6.1) e passando la derivata sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} \frac{df(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\zeta) \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Procedendo per induzione ritroviamo la formula per la derivata n-esima. Possiamo fornire una dimostrazione piu' rigorosa costruendo il rapporto incrementale e passando al limite. Dato un punto z ed uno spostamento infinitesimo Δz si ha:

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - (z + \Delta z)} - \frac{1}{\zeta - z} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)} d\zeta. \end{aligned} \quad (2.43)$$

A questo punto costruiamo la differenza tra la precedente e la relazione cercata, data dal membro a destra della (2.41) per la derivata prima con $n = 1$:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)} d\zeta - \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right) \\ &= \frac{\Delta z}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)} d\zeta, \end{aligned} \quad (2.44)$$

e maggiorando con la disuguaglianza di Darboux:

$$|\Delta| \leq \frac{|\Delta z|}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{|d\zeta| |f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z - \Delta z|} \leq \frac{|\Delta z|}{2\pi} \frac{2ML}{\ell^3}, \quad (2.45)$$

in cui abbiamo definito $M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$, $\ell = \min_{\zeta \in \gamma} |\zeta - z|$ e usato la seguente minorazione:

$$|\zeta - z - \Delta z| \geq |\zeta - z| - |\Delta z| \geq \ell - |\Delta z| > \frac{\ell}{2} \quad \text{per} \quad |\Delta z| < \frac{\ell}{2}.$$

Avremo dunque che per Δz piccolo, ossia $|\Delta z| < \delta$:

$$|\Delta| \leq \frac{|\Delta z| ML}{2\pi \ell^3} < \frac{\delta M}{\pi \ell^3} < \epsilon, \quad (2.46)$$

con $\epsilon \ll 1$.

Teorema del massimo (minimo) modulo

Teorema 2.6.3 Se $f(z)$ e' analitica in un dominio \mathcal{D} e continua sulla frontiera $\partial\mathcal{D}$, allora $|f(z)|$ non puo' raggiungere il suo massimo (o il suo minimo) in un punto interno al dominio.

Dalle ipotesi fatte, $|f(z)|$ e' continua in $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ e in esso vi raggiunge il suo massimo. Dato M il massimo del modulo di $f(z)$ su $\partial\mathcal{D}$, consideriamo un punto z_0 interno alla frontiera, e applichiamo la formula di Cauchy:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|} |dz| \leq \frac{M\ell}{2\pi\delta} \quad \text{con} \quad \delta = \min_{z \in \partial\mathcal{D}} |z - z_0|, \quad (2.47)$$

M massimo del modulo di $f(z)$ su $\partial\mathcal{D}$, e ℓ lunghezza della frontiera. D'altro canto la formula integrale di Cauchy vale per ogni potenza n -esima di $f(z)$ e dunque, per n intero positivo:

$$|f(z_0)|^n \leq \frac{\ell M^n}{2\pi\delta} \quad \rightarrow \quad |f(z_0)| \leq M \left(\frac{\ell}{2\pi\delta} \right)^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M. \quad (2.48)$$

Il risultato precedente e' del tutto generale, e vale per qualsiasi punto z_0 interno al dominio. Dunque il modulo della $f(z)$ e' sempre minore o uguale al massimo. Possiamo dimostrare che l'uguaglianza si ottiene solo nel caso in cui la funzione e' costante. Supponiamo infatti che per z_0 interno al dominio $|f(z_0)| = M$. Preso γ come una circonferenza di raggio R centrata nel punto avremo:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\theta})| d\theta \leq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + Re^{i\theta})| \leq |f(z_0)|, \quad (2.49)$$

dunque

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\theta})| d\theta \quad (2.50)$$

ossia

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + Re^{i\theta})|) d\theta = 0. \quad (2.51)$$

Dato che $|f(z_0)| - |f(z_0 + Re^{i\theta})|$ e' una funzione continua del parametro θ e

$$|f(z_0)| - |f(z_0 + Re^{i\theta})| \geq 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

ne segue che

$$|f(z_0)| = |f(z_0 + Re^{i\theta})| \quad (2.52)$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, ossia $|f(z_0)| = |f(z)|$ per ogni z appartenente alla circonferenza di raggio R . Dato che quest'ultimo e' arbitrario, possiamo generalizzare dicendo che $|f(z_0)| = |f(z)| \forall z \in \mathcal{D}$, da cui⁶ $f(z)$ costante. La Figura 2.12 mostra i valori di $|\cos z|$ e di $|e^{z/2}|$ al variare di z nel cerchio unitario. Come si vede, in entrambi i casi il modulo non assume il valore massimo all'interno del disco, ma su qualche punto della circonferenza.

Un risultato analogo si ottiene per il minimo del modulo, seguendo i passi della dimostrazione appena fatta, ma lavorando sulla funzione

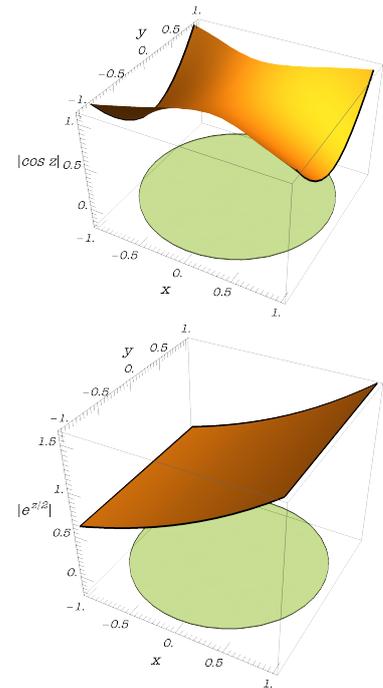


Figure 2.12: Modulo di $f(z) = \cos z$ e di $f(z) = e^{z/2}$ per valori di z appartenenti al cerchio unitario.

6: Vale infatti il seguente teorema: se $f(z)$ e' analitica in un dominio \mathcal{B} aperto e connesso, e $|f(z)|$ e' costante in \mathcal{B} , allora $f(z)$ e' anch'essa costante nel dominio.

$g(z) = 1/f(z)$, purché $f(z)$ non abbia zeri in $\bar{\mathcal{D}}$.

Primo teorema di Liouville

Teorema 2.6.4 *Se una funzione $f(z)$ è analitica e limitata in \mathbf{C} , allora $f(z)$ è costante.*

La dimostrazione dell'enunciato è immediata. Dalla formula integrale di Cauchy per la derivata prima $f^{(1)}(z)$, con γ circonferenza di raggio R arbitrario e centro z :

$$|f^{(1)}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad (2.53)$$

in cui abbiamo usato il fatto che per ipotesi la funzione è limitata, $|f(z)| \leq M \in \mathbf{R} \forall z \in \mathbf{C}$. L'annullamento della derivata prima ci conferma dunque che la funzione di partenza è costante.

Il teorema di Liouville ci dice dunque che se una funzione è analitica ovunque nel piano complesso, e non è una costante, deve necessariamente avere una singolarità all'infinito. È il caso dei polinomi o dell'esponenziale.

Secondo teorema di Liouville

Teorema 2.6.5 *Se $f(z)$ è analitica in ogni dominio limitato di \mathbf{C} e $|f(z)| < M|z|^m$ per $|z| \rightarrow \infty$ con $m \in \mathbf{N}$, allora la funzione è un polinomio di grado minore o uguale ad m .*

Per dimostrare il teorema, consideriamo ancora una volta una curva γ data da una circonferenza centrata in z di raggio R . Per la derivata $(m+1)$ -esima si ha

$$\begin{aligned} |f^{(m+1)}(z)| &\leq \frac{(m+1)!}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{|f(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta - z|^{m+2}} \leq \frac{(m+1)!}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{M |\zeta|^m |d\zeta|}{R^{m+2}} \\ &\leq M \frac{(m+1)! (|z| + R)^m}{2\pi R^{m+2}} \oint_{\gamma} |d\zeta| \\ &\leq M(m+1)! \frac{(|z| + R)^m}{R^{m+1}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

in cui dalla prima alla seconda riga abbiamo sfruttato il fatto che su γ vale $|\zeta| = |z + Re^{i\theta}| \leq |z| + R$. Quanto scritto in precedenza ci dice che $f^{(m+1)}(z) = 0$ per $z \in \mathbf{C}$, che equivale a dire che $f(z)$ è un polinomio di grado non superiore ad m .

Teorema di Morera

Come ultimo risultato andiamo ad enunciare il teorema di Morera, talvolta definito (in modo irrispettoso!) come l'inverso del teorema di Cauchy.

Teorema 2.6.6 *Se $f(z)$ è continua in un dominio \mathcal{D} semplicemente connesso,*

e lungo una curva chiusa $\gamma \subset \mathcal{D}$

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (2.55)$$

allora $f(z)$ e' analitica in \mathcal{D} .

Dalle ipotesi del teorema, l'integrale

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta,$$

non dipende dalla curva che unisce z a z_0 . Inoltre $F(z)$ e' continua e derivabile per ogni $z \in \mathcal{D}$, con $F'(z) = f(z)$, da cui discende che $f(z)$ e' essa stessa analitica.

Notiamo che il teorema di Morera ci fornisce una nuova definizione di analiticit : $f(z)$ e' analitica in un dominio semplicemente connesso, se e' in esso continua e il suo integrale lungo una qualsiasi curva chiusa contenuta nel dominio si annulla.

2.7 Integrazioni su archi infiniti e infinitesimi

In molte occasioni avremo a che fare con integrali lungo circonferenze o archi di circonferenza, il cui raggio tende ad infinito o a zero. In questa sezione andremo ad approfondire la trattazione di questi oggetti: spesso infatti la funzione integranda presenta delle caratteristiche tali da semplificare notevolmente il calcolo degli integrali.

Il concetto cardine della nostra discussione e' il seguente. Data una $f(z)$ continua in un dominio \mathcal{D} , diremo che essa converge uniformemente a 0, $f(z) \xrightarrow{unif} 0$, per $|z| = R \rightarrow \infty$ se esiste una costante μ_R tale che

$$|f(z)| \leq \mu_R, \quad z \in \mathcal{D} \quad \text{con} \quad \mu_R \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad R \rightarrow \infty, \quad (2.56)$$

Allo stesso modo $f(z) \xrightarrow{unif} 0$ per $|z| = \rho \rightarrow 0$ se

$$|f(z)| \leq \mu_\rho, \quad z \in \mathcal{D} \quad \text{con} \quad \mu_\rho \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \rho \rightarrow 0. \quad (2.57)$$

Da queste due relazioni discendono alcune importanti conseguenze sugli integrali su archi infiniti e infinitesimi.

1. Se $zf(z) \xrightarrow{unif} 0$ per $|z| \rightarrow \infty$ su un arco \mathcal{C}_R di raggio R :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz = 0. \quad (2.58)$$

In questo caso infatti $|zf(z)| \leq \mu_R \rightarrow |f(z)| \leq \mu_R/R$ e maggiorando l'integrale⁷:

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\mu_R}{R} \int_{\mathcal{C}_R} |dz| = \frac{\mu_R}{R} \alpha R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

7: Sia α l'angolo sotteso dall'arco

2. Se $zf(z) \xrightarrow{unif} A$ per $|z| \rightarrow \infty$ su \mathbb{C}_R :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}_R} f(z) dz = i\alpha A. \quad (2.59)$$

Nell'ipotesi di convergenza uniforme infatti possiamo scrivere la funzione di partenza come $f(z) = \frac{A}{z} + \tilde{f}(z)$ con $z\tilde{f}(z) \xrightarrow{unif} 0$ su \mathbb{C}_R . Sostituendo nell'integrale:

$$\int_{\mathbb{C}_R} f(z) dz = A \int_{\mathbb{C}_R} \frac{dz}{z} + \int_{\mathbb{C}_R} \tilde{f}(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} i\alpha A. \quad (2.60)$$

3. S $(z - z_0)f(z) \xrightarrow{unif} 0$ su \mathbb{C}_ρ per $\rho = |z - z_0| \rightarrow 0$ si ha

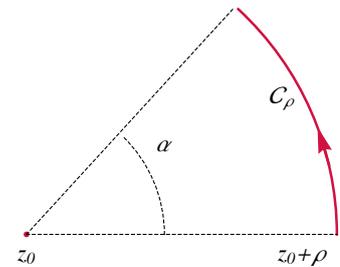
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}_\rho} f(z) dz = 0. \quad (2.61)$$

Per la dimostrazione, sia per ipotesi $|(z - z_0)f(z)| \leq \mu_\rho$ con $\mu_\rho \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$, tale che $|f(z)| \leq \mu_\rho / \rho$:

$$\left| \int_{\mathbb{C}_\rho} f(z) dz \right| \leq \frac{\mu_\rho}{\rho} \int_{\mathbb{C}_\rho} |dz| = \alpha \mu_\rho \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0. \quad (2.62)$$

4. Se $(z - z_0)f(z) \xrightarrow{unif} A$ su \mathbb{C}_ρ per $\rho \rightarrow 0$ allora

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}_\rho} f(z) dz = i\alpha A. \quad (2.63)$$



La dimostrazione procede in modo analogo al punto 2, assumendo che in questo caso $f(z) = \frac{A}{z - z_0} + \tilde{f}(z)$.

Esempio 2.7.1 Studiare le proprietà di convergenza delle seguenti funzioni

$$a) f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad b) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - z_0}.$$

a) La $f(z)$ può essere maggiorata come:

$$|f(z)| \leq \frac{R}{|R^2 - 1|} = \begin{cases} \frac{R}{R^2 - 1} & \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \\ \frac{R}{1 - R^2} & \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0. \end{cases}$$

e dunque essa converge uniformemente a 0 sia su archi infiniti che infinitesimi.

b) In questo caso osserviamo che la funzione può essere scritta come

$$f(z) = \frac{1 + z_0^2 - z_0^2 + z^2}{z - z_0^2} = \frac{A}{z - z_0} + (z + z_0),$$

con $A = 1 + z_0^2$. Dunque la $f(z)$ è tale che $(z - z_0)f(z) \xrightarrow{unif} A$ per $z \rightarrow z_0$.

2.8 Il lemma di Jordan

Andiamo infine a dimostrare un risultato fondamentale del calcolo integrale, che completa il discorso fatto nella sezione precedente, noto come *lemma di Jordan*.

Se $f(z)$ converge uniformemente a zero su una semi circonferenza di raggio R nel semipiano superiore immaginario, allora:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R/2} e^{ikz} f(z) dz = 0 \quad \text{con } k \in \mathbf{R} > 0. \quad (2.64)$$

Il risultato vale anche nel caso in cui la circonferenza sia chiusa nel semipiano inferiore⁸ purché $k < 0$. La dimostrazione del lemma è la seguente⁹:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R/2} e^{ikz} f(z) dz \right| &\leq \int_{C_R/2} e^{-kR \sin \theta} |f(z)| |dz| \leq \mu_R R \int_0^\pi e^{-kR \sin \theta} d\theta \\ &= 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin \theta} d\theta \\ &\leq 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2kR\theta}{\pi}} d\theta \\ &= \frac{\pi \mu_R}{k} (1 - e^{-kR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Esempio 2.8.1 Calcolare il valore dell'integrale di $g(z) = e^{ikz^2} f(z)$ con $k > 0$ e $|f(z)| < M \xrightarrow{\text{unif}} 0$ per $R > R_0 > 0$, su un quarto di circonferenza posta nel primo quadrante.

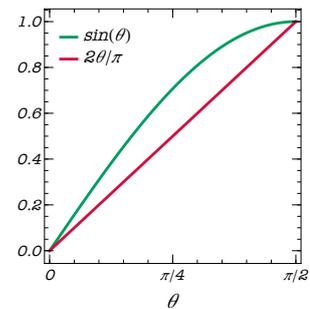
Lungo la circonferenza $ikz^2 = R^2 e^{2i\theta} = ikR^2 \cos 2\theta - kR^2 \sin 2\theta$. Maggiorando l'integrale dunque si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R/4} e^{ikz^2} f(z) dz \right| &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-kR^2 \sin 2\theta} MR d\theta = 2MR \int_0^{\pi/4} e^{-kR^2 \sin 2\theta} d\theta \\ &\leq 2MR \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{4kR^2\theta}{\pi}} d\theta \\ &= 2RM \frac{-\pi}{4kR^2} (e^{-kR^2} - 1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

avendo notato che $\sin 2\theta$ soddisfa in $[0, \frac{\pi}{2}]$ le stesse proprietà di $\sin \theta$ in $[0, \pi]$.

8: Notiamo che $e^{ikz} = e^{ik(x+iy)} = e^{ikx} e^{-ky}$, dunque se $k > 0$ per far sì che l'esponenziale non esploda è necessario che $\text{Im}(z) \leq 0$. Viceversa per $k < 0$.

9: Nella seconda riga abbiamo usato le proprietà di simmetria di $\sin \theta$ in $[0, \pi]$, mentre nella terza il fatto che in $[0, \pi/2]$ esso è sempre maggiore della retta $\frac{2\theta}{\pi}$.



Serie 3

In questo capitolo andremo ad approfondire lo studio delle serie nel campo complesso. Ci occuperemo in particolare di serie di potenze, e della loro generalizzazione in serie di funzioni, del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

Queste hanno un grande interesse in fisica, in cui un determinato fenomeno puo' essere approssimato come la somma di funzioni di un certo tipo, ad esempio trigonometriche, con applicazioni dall'ottica, all'acustica, alla risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali. Ci porremo innanzitutto il problema di capire se e a cosa convergono le serie, e in che maniera. Andremo a generalizzare il Teorema di Taylor gia' noto in analisi reale, scoprendo le connessioni tra espansioni in serie e funzioni analitiche. Infine, introdurremo gli sviluppi di Laurent, o serie bilatere, con termini a potenza negativa.

3.1 Tipi di convergenza

Definiamo innanzitutto le proprieta' di convergenza di una serie di funzioni, definendo i tre tipi di convergenza per punti, assoluta e uniforme.

Consideriamo una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ definite in un dominio $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$.

- La serie converge per punti a $f(z)$ in $z \in \mathcal{A}$ se la successione delle somme parziali $\{S_n(z)\}$ converge a $f(z)$ in \mathcal{A} . Ciò significa che $\exists \mathcal{N}(\epsilon, z) > 0$ tale che se $n > \mathcal{N}(\epsilon, z)$

$$|S_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{n=\mathcal{N}(\epsilon, z)+1}^{\infty} f_n(z) \right| < \epsilon, \quad (3.1)$$

ossia il resto tra la somma e la serie parziale $S_n(z)$ e' minore di un infinitesimo piccolo a piacere. Notiamo che \mathcal{N} non dipende solo da ϵ ma anche da z , dunque la convergenza dipende dal punto in esame.

- Quando e' possibile trovare un $\mathcal{N}(\epsilon)$ che sia valido per tutti i punti z appartenenti al dominio, e dipende solo da ϵ , allora la convergenza si dice uniforme. In modo piu' rigoroso¹ esiste un $\mathcal{N}(\epsilon) > 0$ tale che se $n > \mathcal{N}(\epsilon)$

$$|S_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{n=\mathcal{N}(\epsilon)+1}^{\infty} f_n(z) \right| < \epsilon, \quad (3.2)$$

3.1 Tipi di convergenza	21
3.2 L'importanza di essere uniforme	24
3.3 Il Teorema di Cauchy-Hadamard	25
3.4 Il teorema di Taylor	27
3.5 Serie di Laurent	32

1: Una successione di funzioni $f_n(z)$ converge in modo uniforme anche se dato

$$a_n = \sup_{z \in \mathcal{A}} |S_n(z) - f(z)|,$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

- Diremo infine che avremo convergenza assoluta se la serie dei moduli

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)| \tag{3.3}$$

converge.

Alcune implicazioni tra i concetti appena trovati. La convergenza uniforme implica quella per punti, ma ovviamente non e' necessariamente vero il contrario. La convergenza assoluta non garantisce quella uniforme, dato che quest'ultima rappresenta una proprieta' globale. Tuttavia se una serie converge in modo assoluto allora convergera' anche per punti. L'opposto non vale in generale. La figura 3.1 fornisce una rappresentazione grafica di queste connessioni.

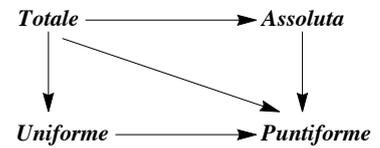


Figure 3.1: Implicazioni tra le proprieta' di convergenza di una serie di funzioni. Le frecce non sono reversibili.

Esempio 3.1.1 Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per punti ma non assolutamente.

Abbiamo a che fare con una serie alternante, del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Quest'ultima converge se a_n decresce in modo monotono $\forall n$, e nel limite $n \rightarrow \infty, a_n \rightarrow 0$. Entrambe queste condizioni sono verificate nel nostro caso. Tuttavia, la serie non converge in modo assoluto. Dobbiamo infatti dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

converge (o no). In questo caso possiamo usare il criterio di convergenza integrale per cui, se $f : [1, \infty]$, non-negativa e monotona decrescente, allora la serie converge se

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x)dx < \infty.$$

Per il caso in esame abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{dx}{x} < \infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \log(x) \Big|_1^t \rightarrow \infty.$$

Dunque la serie non converge in modo assoluto.

- Diremo infine che la convergenza e' totale se essa e' assoluta e allo stesso tempo uniforme.

In questo scenario, il criterio fondamentale per determinare se la convergenza e' totale e' l'*M-test di Weirstrass* per cui:

Proposition 3.1.1 Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ definita in $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$, se $|f_n(z)| \leq M_n$ con M_n indipendente da $z \in \mathcal{A}$ e tale che $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, allora la serie di partenza e' convergente.

La dimostrazione dell'enunciato e' la seguente. Se la serie converge allora per $n > \mathcal{N}$

$$|S_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{n=\mathcal{N}+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=\mathcal{N}+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=\mathcal{N}+1}^{\infty} |M_n| < \epsilon, \tag{3.4}$$

in cui nell'ultimo passaggio abbiamo supposto che la serie degli M_n converga. Inoltre essendo gli M_n indipendenti da z , la convergenza sarà anche uniforme.

Vediamo come esempio quello della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n ,$$

che ha come somma parziale

$$S_n(z) = \sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

Vediamo subito che la serie geometrica converge per $|z| < 1$ in modo assoluto. Infatti in questo caso

$$\sum_{n=0}^N |z|^n = \frac{1 - |z|^{N+1}}{1 - |z|} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - |z|}$$

Tuttavia la serie non converge in modo uniforme per $|z| < 1$. Infatti fissato un ϵ piccolo a piacere, per un dato N è sempre possibile trovare un valore di z tale che il resto

$$|S(z) - f(z)| = \left| \frac{1 - |z|^{N+1}}{1 - |z|} - \frac{1}{1 - z} \right| = \frac{|z|^{N+1}}{|1 - z|} > \epsilon .$$

Proprio come visto nella definizione di convergenza uniforme, l'intero N non dipende solo da ϵ , ma anche da z . Detto in altri termini, a (ϵ, N) fissati, avvicinandosi a $z = 1$ il resto cresce sempre tale da essere maggiore della soglia. Dobbiamo dunque impedire a z di avvicinarsi troppo a 1. Se $|z| \leq \rho < 1$ allora

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\rho|^n ,$$

che è convergente. In questo caso possiamo infatti trovare un intero N oltre il quale il resto sarà piccolo a piacere e in modo indipendente da z . Infatti

$$|S(z) - f(z)| = \frac{|z|^{N+1}}{|1 - z|} \leq \frac{\rho^{N+1}}{1 - \rho} < \epsilon$$

da cui il valore di N tale che per $n > N$ sia soddisfatta la precedente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} \rho^{N+1} = \epsilon(1 - \rho) &\rightarrow (N + 1)\log \rho = \log[\epsilon(1 - \rho)] \\ &\rightarrow N = \frac{\log[\epsilon(1 - \rho)]}{\log \rho} - 1 , \end{aligned}$$

che è fissato una volta scelti ρ e la soglia ϵ .

A chiusura, notiamo infine che la condizione (3.2) nel piano complesso ha un'interpretazione geometrica molto intuitiva. Infatti la disuguaglianza $|S_n - f(z)| < \epsilon$ definisce l'interno di una circonferenza di raggio ϵ : stiamo cioè richiedendo dopo un certo punto, tutti i successivi si trovano in un cerchio centrato in $f(z)$ arbitrariamente piccolo. I due pannelli in Fig. 3.2 forniscono degli esempi di convergenza della serie geometrica in punti

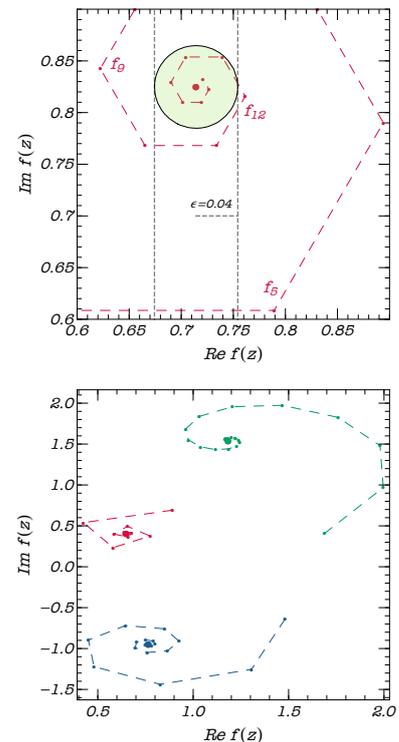


Figure 3.2: (Pannello superiore) Convergenza della serie geometrica in $\bar{z} = 0.8e^{i\pi/3}$ al variare dei termini della somma parziale $f_n(z)$ all'interno di una circonferenza di raggio $\epsilon = 0.04$ centrata in $f(\bar{z}) = \frac{1}{1-\bar{z}}$. (Pannello inferiore) Esempi di serie geometrica al variare di $f_n(z)$ per diversi punti $|z| < 1$.

specifici del piano.

3.2 L'importanza di essere uniforme

L'uniforme convergenza rappresenta una proprietà fondamentale di una serie, dato che ci permette di *trasportare* alcune proprietà della somma parziale a quelle della somma. Vediamo quali.

Proposition 3.2.1 *Sia data la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad (3.5)$$

con $f_n(z)$ uniformemente convergenti in un dominio $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$, e sia $f(z)$ la somma di tale serie. Avremo allora che:

- ▶ se le $f_n(z)$ sono continue lo sarà anche $f(z)$.
- ▶ Se le $f_n(z)$ sono continue su una curva γ inclusa in \mathcal{B} , allora è possibile scambiare la somma infinita con l'integrale, ossia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (3.6)$$

- ▶ Se le $f_n(z)$ sono analitiche in \mathcal{B} , allora lo è anche $f(z)$.

Per dimostrare il primo enunciato, consideriamo due punti appartenenti al dominio, $(z, c) \in \mathcal{B}$ e calcoliamo la *distanza* tra $f(z)$ e $f(c)$. Richiedere la continuità della $f(z)$ vuol dire che per $z \simeq c$, $f(z) \simeq f(c)$. In modo più rigoroso:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(c)| &= |f(z) + f_n(z) - f_n(z) + f_n(c) - f_n(c) - f(c)| \\ &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(c)| + |f(c) - f_n(c)|, \end{aligned} \quad (3.7)$$

avendo fatto uso della disuguaglianza triangolare. Per l'ipotesi iniziale di convergenza uniforme per ogni $|z - c| < \delta$, esiste un n , dipendente solo da ϵ , oltre il quale $f(z)$ e $f_n(c)$ sono vicine a piacere, in particolare

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (3.8)$$

Avremo dunque

$$|f(z) - f(c)| < \frac{2}{3}\epsilon + |f_n(z) - f_n(c)|. \quad (3.9)$$

D'altro canto per la continuità delle f_n si ha anche che quando $|z - c| < \delta$:

$$|f_n(z) - f_n(c)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \rightarrow \quad |f(z) - f(c)| < \epsilon \quad \text{se} \quad |z - c| < \delta. \quad (3.10)$$

La proof del secondo punto è del tutto simile al caso reale. Consideriamo dunque $f(z) = \mathcal{S}_n(z) + \mathcal{R}_n(z)$, dove \mathcal{S} e \mathcal{R} sono somma parziale e resto della serie. Abbiamo assunto che le $f_n(z)$ sono continue, e dunque (per il punto precedente) anche la $f(z)$ che è integrabile. L'ipotesi di convergenza uniforme ci dice che $|\mathcal{R}_n(z)| < \epsilon$ per ogni valore di $z \in \mathcal{B}$.

Da cio' ricaviamo:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} \mathcal{S}_n(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} \mathcal{R}_n(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |\mathcal{R}_n(z)| |dz| < \epsilon \ell \quad (3.11)$$

con ℓ lunghezza della curva. Dunque

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} \sum_{n=0}^k f_n(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{n=0}^k \int_{\gamma} f_n(z) dz \right| < \epsilon \ell, \quad (3.12)$$

e passando al limite $k \rightarrow \infty$ otteniamo il risultato cercato.

Per l'ultimo punto della (3.2.1) consideriamo l'integrale di $f(z)$ lungo una qualunque curva chiusa γ inclusa in \mathcal{B} :

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma} f_n(z) dz = 0. \quad (3.13)$$

Nel penultimo passaggio della precedente abbiamo usato la proprieta' del passaggio di sommatoria ad di fuori dell'integrale, nell'ultimo il teorema di Cauchy applicato alle $f_n(z)$. Per il teorema di Morera allora anche la $f(z)$ e' analitica in \mathcal{B} .

3.3 Il Teorema di Cauchy-Hadamard

A questo punto andiamo ad enunciare un risultato fondamentale, che va sotto il nome di teorema di Cauchy-Hadamard, che ci permette di identificare in modo immediato le proprieta' di convergenza di una serie.

Teorema 3.3.1 *Data la serie di potenze centrata in z_0*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (3.14)$$

definiamo il raggio di convergenza della serie il numero positivo

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (|c_n|^{\frac{1}{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{c_{n+1}}{c_n} \right), \quad (3.15)$$

tale che la serie converge assolutamente in $|z - z_0| < R$, uniformemente in $|z - z_0| \leq \rho < R$, e diverge per $|z - z_0| > R$.

Conseguenza immediata di questo risultato e' il primo teorema di Abel, per cui se la serie di potenze converge in $z_1 \neq z_0$, essa converge assolutamente nel cerchio $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. La dimostrazione e' immediata. Dato infatti il cerchio di convergenza, z_1 non puo essere esterno ad esso, altrimenti la serie sarebbe divergente, dunque si trova sul bordo o all'interno. In entrambi i casi vale la relazione $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Andiamo a vedere alcune applicazioni sul raggio di convergenza di serie di potenze.

Esempio 3.3.1 Calcolare il raggio di convergenza delle seguenti serie

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n} \quad , \quad ii) \sum_{n=0}^{\infty} (nz)^n \quad , \quad iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{bn}}{(n!)^a} (z - z_0)^n$$

con $(a, b) \in \mathbf{R}^+$, e utilizzando, quando necessario, la formula di Stirling per il fattoriale $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} + \mathcal{O}(1/n)$.

Applichiamo dunque la formula di Cauchy-Hadamard.

(i) In questo caso $c_n = \frac{1}{n^n}$, dunque

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^n} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \rightarrow R = \infty .$$

(ii) In questo caso $c_n = n^n$ e

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |n^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \rightarrow R = 0 .$$

(iii) Il raggio di convergenza della nostra serie dipendera' dai valori delle costanti a, b . Usando la formula di Stirling:

$$c_n = \frac{b^{nb}}{(n!)^a} = \frac{n^{nb}}{n^{na} e^{-na} (2\pi n)^{a/2}} ,$$

da cui^a

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^{n(b-a)}}{e^{-na} (2\pi n)^{a/2}} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^{(b-a)e^a}}{(2\pi n)^{\frac{a}{2n}}} \right| . = e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{b-a} .$$

Definendo $c = b - a$ avremo tre casi possibili

1. $a = b \rightarrow c = 0$:

$$e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^c = e \rightarrow R = \frac{1}{e} .$$

2. $a < b \rightarrow c > 0$:

$$e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^c = \infty \rightarrow R = 0 .$$

3. $a > b \rightarrow c < 0$:

$$e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^c = 0 \rightarrow R = \infty .$$

^a Ad esempio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{a}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left[\frac{a \log(n)}{n}\right] = \exp\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \log(n)}{n}\right] = \exp[0] = 1 .$$

Esempio 3.3.2 Trovare il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^a}$ con $a \in \mathbf{R}$ e studiarne le proprieta' sul bordo.

Tramite il criterio (3.15) si ha immediatamente

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^a} \right|^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \rightarrow \quad R = 1.$$

Le proprietà di convergenza sul bordo del disco, $|z| = 1$ dipenderanno dal valore di a scelto. Vediamo subito che per $a < 0$ la serie è sempre divergente, mentre per $a > 1$ la serie è sempre convergente.

La situazione più interessante è quello con $0 < a \leq 1$. In questo caso la serie converge per tutti i valori $|z| = 1$, con $z \neq 1$. Infatti per $z = 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a},$$

diverge (è possibile dimostrarlo ad esempio con il test integrale). Per $z = -1$ la serie converge. In questo caso abbiamo a che fare con una serie alternante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a},$$

che converge (criterio di Leibniz) quando $|c_n|$ decresce in modo monotono, $|c_{n+1}| < |c_n|$ per ogni n , e $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| \rightarrow 0$ come nel nostro esempio. Nel caso più generale, quando siamo su un punto generico della circonferenza $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{i\theta})^n}{n^a},$$

Possiamo sfruttare il criterio di Dirichlet^a per dimostrare che la serie converge per ogni valore di θ nel dominio specificato (dunque eccetto $\theta = 0 = 2\pi$) la serie converge. La successione $1/n^a$ soddisfa già le richieste del criterio. Identificando $\{b_n\} = \{e^{in\theta}\}$ e sfruttando la somma parziale della serie geometrica avremo inoltre:

$$\left| \sum_{n=1}^N (e^{i\theta})^n \right| = \left| \frac{e^{i\theta} - e^{(N+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| = \frac{|1 - e^{iN\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|}.$$

In generale $|1 - e^{iN\theta}| = \sqrt{2(1 - \cos N\theta)}$ che è una quantità limitata, ≤ 2 . Dunque la serie converge sul cerchio unitario ad eccezione dell'intersezione della circonferenza con l'asse reale, ossia per $z = 1$.

^a Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$ che sia monotona decrescente e tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, e una successione di numeri complessi $\{b_n\}$, tali che $|\sum_{n=1}^N b_n| < M$ con M finito per ogni intero positivo N , allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ è convergente.

3.4 Il teorema di Taylor

Andiamo ora a discutere due teoremi fondamentali, uno complementare all'altro, che ci forniscono una relazione biunivoca tra serie di potenze convergenti e funzioni analitiche.

Per prima cosa introduciamo il seguente teorema

Teorema 3.4.1 Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (3.16)$$

assolutamente convergente nel cerchio $|z - z_0| < R$ a $f(z)$. Allora

- ▶ la serie e' uniformemente convergente nel cerchio $|z - z_0| \leq \rho < R$.
- ▶ $f(z)$ e' analitica in $\{z : |z - z_0| < R\}$, e la sua derivata n -esima e' anch'essa analitica e data da:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-1)c_k (z - z_0)^{k-n}, \quad (3.17)$$

che converge ancora nel cerchio di raggio R .

- ▶ i coefficienti dell'espansione in serie di potenze possono essere scritti come

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \quad (3.18)$$

Quanto enunciato ci dice che una serie di potenze positive, con raggio di convergenza $R > 0$, e' la serie di Taylor di una funzione $f(z)$, analitica per $|z - z_0| < R$. I primi due punti sono rispettivamente conseguenza del teorema di Cauchy-Hadamard, e delle proprieta' delle serie uniformemente convergenti. Per quanto riguarda il terzo punto possiamo dimostrarlo per induzione. Per semplicita' poniamo z_0 e calcoliamo la forme della derivate di $f(z)$:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(z) &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, \\ f^{(1)}(z) &= c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \dots, \\ f^{(2)}(z) &= 2c_2 + 6c_3 z + \dots, \\ f^{(3)}(z) &= 6c_3 + \dots, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\dots \quad (3.20)$$

Nel punto $z = 0$ si ha:

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = f^{(1)}(0), \quad c_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2}, \quad c_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \dots \quad (3.21)$$

Per uno $z_0 \neq 0$ generico si ha dunque $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ che completa la nostra dimostrazione.

Possiamo infine provare che lo sviluppo e' unico, ossia che date due serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad (3.22)$$

che hanno stessa somma $g(z)$ e raggio di convergenza, allora $a_n = b_n$. Infatti, se le serie tendono alla stessa funzione, allora per il teorema precedente

$$a_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad b_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \rightarrow \quad a_n = b_n. \quad (3.23)$$

Abbiamo dunque visto che una serie di potenze definisce una funzione

analitica nel suo cerchio di convergenza. Possiamo a questo punto porci la domanda inversa, ossia se data una funzione analitica sia possibile definire uno sviluppo in serie di potenze che converga ad essa in un cerchio dato. La risposta è data dal seguente teorema di Taylor:

Teorema 3.4.2 Una funzione $f(z)$ analitica in un dominio semplicemente connesso \mathcal{D} è sviluppabile in serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (3.24)$$

in ogni disco $\{z : |z - z_0| < R\} \subset \mathcal{D}$, tale che i coefficienti dello sviluppo hanno la seguente rappresentazione integrale

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (3.25)$$

dove γ è un contorno chiuso contenuto nel disco, che gira attorno a z_0 in senso antiorario. La serie è inoltre definita univocamente.

Per la dimostrazione, consideriamo una circonferenza γ di raggio $R_2 < R$ all'interno del dominio \mathcal{D} e sia un punto a interno ad essa. Essendo tale punto interno al dominio, la $f(z)$ è analitica, e dunque possiamo utilizzare la formula integrale di Cauchy:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta. \quad (3.26)$$

Con una piccola manipolazione algebrica andiamo inoltre a riscrivere il termine al denominatore della precedente come:

$$\frac{1}{(\zeta - a)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a - z_0}{\zeta - z_0}},$$

ed usando l'espansione della progressione geometrica nel secondo fattore a destra della precedente otteniamo²

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta - a)} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{a - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \dots + \frac{(a - z_0)^{n-1}}{(\zeta - z_0)^n} + \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

Notiamo che per $\zeta \in C_{R_2}$, ossia sulla circonferenza, la serie (3.27) converge uniformemente rispetto a ζ . Infatti, in modulo i termini della somma sono maggiorati da

$$\frac{|a - z_0|^k}{|\zeta - z_0|^{k+1}} \leq \frac{|a - z_0|^k}{R_2^{k+1}} = M_k, \quad (3.28)$$

con M_k indipendente da ζ e tale che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a - z_0|^k}{R_2^{k+1}} \quad (3.29)$$

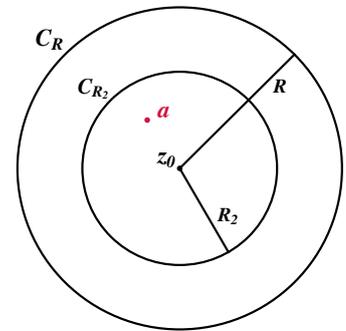


Figure 3.3: Costruzione geometrica utilizzata per dimostrare il teorema di Taylor. La funzione $f(z)$ è analitica nel dominio $|z - z_0| < R$.

2: Utilizzando l'espressione della serie geometrica per $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.$$

Nel nostro caso in particolare $x = \frac{a - z_0}{\zeta - z_0}$, e $|a - z_0| < |\zeta - z_0|$.

e' convergente ($|a - z_0| < R_2$). Sostituendo l'espansione nell'integrale (3.26) si ha

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)} + (a - z_0) \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} + \dots \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right\} (a - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a - z_0)^n. \quad (3.30) \end{aligned}$$

L'espressione appena trovata rappresenta uno sviluppo in serie di potenze, i cui coefficienti sono proprio quelli cercati. Per il teorema di Cauchy, possiamo deformare la circonferenza C_{R_2} in un qualunque cammino contenuto nel dominio di analiticit  della funzione $|z - z_0| < R$. Dato che il punto a scelto prima e' arbitrario, la serie (3.30) convergera' ovunque nel cerchio. Inoltre in $|z - z_0| \leq R_2 < R$ la serie convergera' in modo uniforme. Dunque la $f(z)$ ammette uno sviluppo in serie convergente.

Notiamo inoltre che in base a quanto visto in precedenza che i coefficienti dell'espansione in serie possono essere scritti anche in forma *differenziale* tale che³

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (3.31)$$

3: Abbiamo ritrovato la formula per le derivate n-esime della rappresentazione integrale di Cauchy.

Il teorema appena dimostrato ci fornisce una corrispondenza biunivoca tra una funzione analitica in un punto z_0 , e la sua serie di potenze centrata in questo punto, ossia esiste un'equivalenza tra funzione analitica (infinitamente derivabile) e somma di una serie di potenze. Questa analogia non e' necessariamente vera nel caso reale (vedi esempio 3.4.5.).

Come ultimo passaggio andiamo a dimostrare che lo sviluppo in serie trovato e' unico. A tale scopo supponiamo che esista un altro sviluppo, tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n,$$

in cui almeno uno dei coefficienti e' $c'_n \neq c_n$. La serie converge nel cerchio $|z - z_0| < R$, dunque come conseguenza del teorema di Cauchy-Hadamard $c'_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, che pero' coincidono esattamente con l'espressione (3.31).

Andiamo a vedere alcuni esempi.

Esempio 3.4.1 Espandere in serie di Taylor attorno a $z_0 = 0$ la funzione e^z .

Possiamo usare in questo caso la formula per i coefficienti della serie data (3.31). Avremo $f^{(n)}(z) = e^z$ e dunque $f^{(n)}(0) = 1$, da cui ricaviamo immediatamente

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad |z| < \infty.$$

Esempio 3.4.2 Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor in $z_0 = 0$ della funzione $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$. E trovarne il raggio di convergenza.

Andiamo a calcolare lo sviluppo di ciascun termine della $f(z)$, per poi metterli insieme. Per l'esponenziale al numeratore abbiamo l'espressione

derivata nell'esercizio precedente. Per quanto riguarda il denominatore si ha

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \dots,$$

e dunque in totale

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{con} \quad c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Ora, vediamo subito che l'intorno di $z_0 = 0$ piu' grande in cui la funzione $f(z)$ e' analitica e' il disco $|z| < 1$. Per il teorema di Taylor la funzione ammettera' uno sviluppo convergente all'interno di un cerchio di raggio $R = 1$. Possiamo andare a calcolarci quest'ultimo anche in modo esplicito, notando che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, dunque per il coefficiente n-esimo

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 1,$$

e $R = 1$.

Esempio 3.4.3 Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(z) = \cosh z$. In questo caso possiamo arrivare al risultato utilizzando i risultati visti in precedenza. Il coseno iperbolico puo' essere scritto infatti come

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

e sapendo che

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad e^{-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!},$$

otteniamo immediatamente

$$\cosh z = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} [1 + (-1)^k] = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Ponendo $z^2 = y$ si ha per la serie precedente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(2n)!}$, con $c_n = \frac{1}{(2n)!}$, ed usando la formula di Stirling

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n n}} \right|^{1/n} = 0,$$

da cui $R = \infty$.

Esempio 3.4.4 Trovare lo sviluppo in serie di Taylor a $z_0 = 5$ di $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

In questo caso la strategia migliore e' quella di manipolare la funzione in modo tale da poterci ricondurre ad una serie geometrica. Avremo

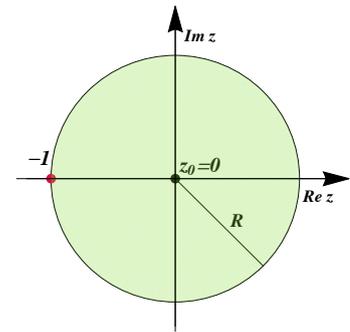


Figure 3.4: Dominio di convergenza, $|z| < 1$ per la serie calcolata nell'esercizio 3.4.2.

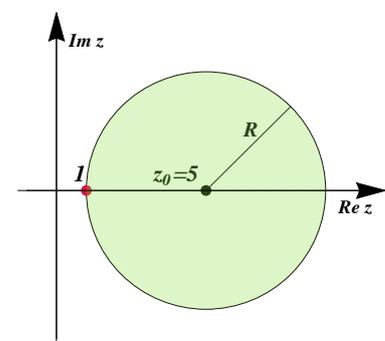


Figure 3.5: Dominio di convergenza, $|z - z_0| < 4$ dell'espansione in serie dell'esercizio 3.4.4.

infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1+5-5-z} = \frac{1}{-4-(z-5)} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{z-5}{4}} = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{(-1)(z-5)}{4}} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} (z-5)^n. \end{aligned} \quad (3.32)$$

La serie appena definita converge per $|z-5| < 4$, ossia in un disco centrato in $z_0 = 5$ e di raggio $|z-5| = R < 4$. Notiamo che avremmo potuto calcolare il raggio di convergenza anche osservando che la funzione non è analitica in $z = 1$, e dunque che il cerchio più grande centrato in 5 che non contiene tale punto ha proprio raggio $R = 4$.

Esempio 3.4.5 Studiare lo sviluppo in serie di Taylor di $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ attorno a $z_0 = 0$.

Lo sviluppo qui è molto semplice, ed è dato da

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = 1 - z^2 + z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad (3.33)$$

con raggio di convergenza $R = 1$. Quello che ci preme dimostrare in questo esempio tuttavia non è il calcolo esplicito della serie, ma la differenza con il caso "reale". La $f(z)$ è infatti analitica in tutto il piano complesso eccetto che nei punti $z = \pm i$ dove non è derivabile. Lo sviluppo trovato ha validità solo nel cerchio $|z| < 1$ dove la funzione è analitica in ogni punto. Consideriamo ora la $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ con $x \in \mathbf{R}$. La funzione è infinitamente derivabile su tutto il piano reale, tuttavia il suo sviluppo di Taylor in $x = 0$ ha validità solo per $|x| < 1$, ossia nell'intervallo $(-1, 1)$. Questo ci dimostra quanto enunciato in precedenza, ossia come nel campo complesso il teorema di Taylor ci fornisca una relazione tra funzione infinitamente differenziabile in un dominio e il suo sviluppo in serie di potenze convergente. Relazione che nel piano nei numeri reali non è sempre verificata.

3.5 Serie di Laurent

Vogliamo ora andare ad introdurre un concetto fondamentale dell'analisi complessa, dato dal teorema di Laurent. Fino ad ora abbiamo considerato sviluppi in serie di potenze con termini *positivi*. È lecito chiedersi cosa succeda nel caso in cui vogliamo estendere quanto visto includendo potenze con esponenti *negativi*. Uno sviluppo di questo tipo è utile per esprimere una funzione il cui dominio di analiticità non è un cerchio, ma una corona.

Consideriamo dunque un punto z_0 tale che $f(z_0)$ non sia derivabile, ma che lo sia in una corona $0 < r < |z - z_0| < R$, e dunque in ogni corona circolare chiusa $r' = r/k \leq |z - z_0| \leq Rk = R'$ con $(k < 1)$. Prendiamo un punto z che si trovi all'interno del cammino racchiuso dalle quattro

curve $C_{1,2,3,4}$ come in figura 3.6. Dalla formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+C_2-C_3-C_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1-C_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \\ &= I_{C_1} + I_{-C_3}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

avendo semplificato gli integrali su C_2 e C_4 che sono effettuati su percorsi uguali ma seguiti nel verso opposto. Andiamo dunque a vedere il valore esplicito dei pezzi rimanenti.

Per farlo notiamo innanzitutto che quando ζ si muove lungo C_1 si ha che $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$, mentre quando percorre il cammino interno C_3 risulta $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$. Questo ci suggerisce la possibilità di utilizzare ancora una volta risultati noti relativi alla serie geometrica. Infatti⁴

$$\begin{aligned} I_{C_1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \frac{d\zeta}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Abbiamo dunque trovato che l'integrale sulla curva C_1 puo' essere scritto come serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^+ (z-z_0)^n \quad c_n^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (3.36)$$

i cui coefficienti hanno la stessa forma di quelli trovati per lo sviluppo di Taylor. Andiamo a vedere il secondo integrale

$$\begin{aligned} I_{-C_3} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(\zeta)}{z-z_0} \frac{d\zeta}{1 - \frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(\zeta)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^n} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^{-n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} f(\zeta) (\zeta-z_0)^n d\zeta \\ &= \sum_{m=-1}^{-\infty} (z-z_0)^m \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} f(\zeta) (\zeta-z_0)^{-m-1} d\zeta, \end{aligned} \quad (3.37)$$

avendo posto $n = -m - 1$. Sommando i due contributi avremo

$$f(z) = I_{C_1} + I_{-C_3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad (3.38)$$

in cui

$$n \geq 0 \quad c_n = c_n^{(+)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (3.39)$$

$$n < 0 \quad c_n = c_n^{(-)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (3.40)$$

Le curve che abbiamo scelte sono del tutto arbitrarie, e dunque pos-

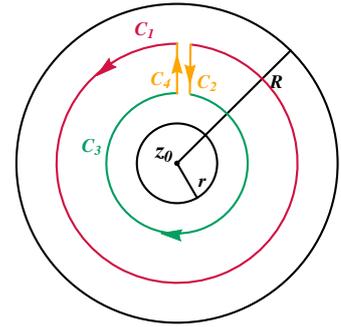


Figure 3.6: Corona circolare $r < |z - z_0| < R$ in cui e' contenuto il cammino $C_{1,2,3,4}$ su cui e' svolto l'integrale (3.34).

4: La serie sotto integrale converge in modo uniforme dato che $\frac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|} \leq q < 1$.

siamo deformatle, fino a farle coincidere, ed enunciare il teorema di Laurent:

Teorema 3.5.1 Una funzione $f(z)$ analitica in una corona circolare \mathcal{D} di raggi $r < R$ e' sviluppabile in una serie bilaterale, con potenze positive e negative, tale che

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (3.41)$$

con γ curva chiusa arbitraria interna alla corona che circonda z_0 . Lo sviluppo e' uniformemente convergente in ogni corona chiusa contenuta in \mathcal{D} .

Ci rimane da dimostrare l'unicita' dello sviluppo, asserendo che ogni serie bilaterale e' la serie di Laurent della somma. Per dimostrarlo, sia data la $S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ convergente in una corona circolare centrata in z_0 . Dividendo a destra e sinistra per un fattore $(z - z_0)^{n+1}$ e integrando su un cammino chiuso γ percorso in senso antiorario e incluso nella corona si ha

$$\oint_{\gamma} \frac{S(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \oint_{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (z - z_0)^{k-(n+1)} c_k dz. \quad (3.42)$$

Tuttavia dalla formula integrale di Cauchy

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^{k-(n+1)} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}, \quad (3.43)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{S(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz &= \oint_{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (z - z_0)^{k-(n+1)} c_k dz = 2\pi i c_n \delta_{kn} \\ &= 2\pi i c_n, \end{aligned} \quad (3.44)$$

dove δ_{ij} e' la delta di Kronecker⁵. La precedente ci dice che i coefficienti della serie in potenze positive e negative di $S(z)$ ha esattamente l'espansione integrale (3.41), che prova l'unicita' dello sviluppo di Laurent.

Come ultima considerazione, ripetiamo che il risultato qui dimostrato *estende* in pratica quanto visto per il teorema di Taylor, per cui in un dominio $|z - z_0| < R$ e' possibile far corrispondere ad una funzione analitica una serie di potenze convergente, ad una corona circolare. Perche' proprio la corona? Per capirlo consideriamo lo sviluppo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(+)} (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^{(-)}}{(z - z_0)^n}. \quad (3.45)$$

Il dominio della precedente e' dato dall'intersezione dei domini delle due serie identificate dai coefficienti c_n^{\pm} . Per la prima componente sappiamo che il dominio di convergenza e' dato dal cerchio centrato in z_0 con un raggio R_1 , all'interno del quale, per $|z - z_0| < R_1$ la serie converge ad una funzione analitica $f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(+)} (z - z_0)^n$. Per la seconda sommatoria della (3.45) introduciamo la variabile $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$, tale da avere $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(-)} \zeta^n$. Definito come $1/R_2$ il raggio di convergenza, avremo che la

5: Ricordiamo che

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

serie a potenze negative converge per $|\zeta| < \frac{1}{R_2}$, o tornando alla variabile iniziale per $|z - z_0| > R_2$, a $f^-(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(-)}(z - z_0)^{-n}$. Avremo dunque in questo caso che il dominio di convergenza e' esterno alla circonferenza di raggio R_2 . Se $R_2 < R_1$ allora esiste un dominio *comune* dato dalla corona $R_2 < |z - z_0| < R_1$, in cui le due serie, a termini positivi e negativi, convergono alla funzione $f(z) = f^+(z) + f^-(z)$.

Andiamo ad analizzare alcuni esempi di sviluppi in serie di Laurent

Esempio 3.5.1 Calcolare la serie di Laurent della funzione $f(z) = \frac{2z-8}{z^2-8z+12}$ attorno a $z_0 = 0$.

Possiamo scrivere la funzione di partenza come

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-6}.$$

La $f(z)$ ha due punti singolari in $z_{1,2} = (2, 6)$, dunque potremo espanderla in tre domini attorno a zero: (a) $|z| < 2$, (b) $2 < |z| < 6$ e (c) $|z| > 6$. Nel primo caso scriviamo:

$$\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-6} = -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} - \frac{1}{6(1-\frac{z}{6})},$$

con il primo termine e il secondo termine rappresentabili in termini della serie geometrica rispettivamente per $|z| < 2$ e $|z| < 6$. In questo caso:

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{6^n} \quad (|z| < 2).$$

Per l'espansione nel secondo dominio vediamo che per la seconda frazione $\frac{1}{z-6}$ possiamo usare lo sviluppo in serie appena trovato dato che quest'ultimo converge per $|z| < 6$. Tuttavia il primo sviluppo diverge per $|z| > 2$, dunque dobbiamo cambiare strategia. In particolare

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z(1-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n},$$

che converge per $|2/z| < 1$ ossia per $|z| > 2$. Avremo dunque

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{6^n} \quad (2 < |z| < 6).$$

La prima serie della precedente converge gia' anche nella terza regione considerata. Tuttavia e' necessario modificare il secondo termine, ossia

$$\frac{1}{z-6} = \frac{1}{z(1-\frac{6}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{z^n},$$

e dunque:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{z^{n+1}} \quad (6 < |z| < \infty).$$

Esempio 3.5.2 Calcolare lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z) = \frac{z}{4z^2+1}$

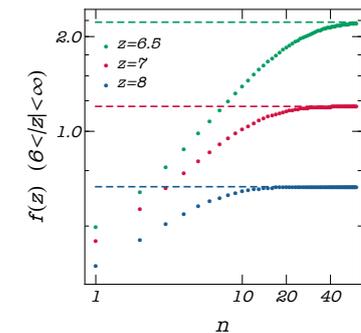
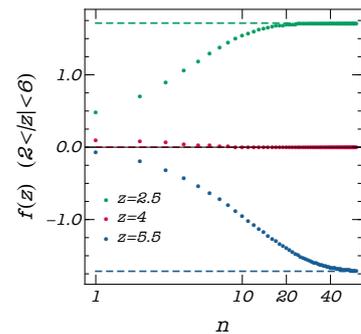
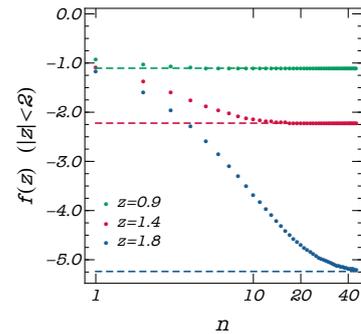
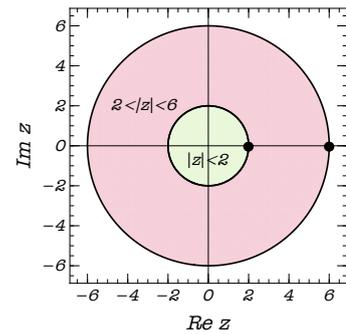


Figure 3.7: (Pannello superiore) Regioni di convergenza (a) e (b) dell'esercizio (3.5.1). i punti neri corrispondono alle singularita' della funzione, $z = 2$ e $z = 6$. (Pannelli centrali) Convergenza della funzione dell'esercizio (3.5.1) all'aumentare del numero di termini della serie, per diversi punti appartenenti al dominio di convergenza (a) (b) e (c) discussi nell'esercizio. Si noti come all'avvicinarsi di z ad una delle singularita' e' necessario considerare molti piu' termini nella sommatoria per arrivare vicini alla convergenza, data dalle linee tratteggiate orizzontali.

nelle regioni

$$a) |z| > \frac{1}{2} \quad , \quad b) |z| < \frac{1}{2} \quad , \quad b) |z - i/2| < 1 .$$

Prima di trovare gli sviluppi vediamo che la funzione ha due punti singolari isolati, entrambi poli semplici, in $z_{\pm} = i/2$.

a) In questo caso notiamo che nella regione considerata

$$|z| > \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad |4z^2| > 1 \quad \longrightarrow \quad \left| \frac{1}{4z^2} \right| < 1 ,$$

che ci suggerisce di poter sfruttare le proprietà della serie geometrica

$$f(z) = \frac{z}{4z^2 + 1} = \frac{z}{4z^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{4z^2}} = \frac{1}{4z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4z^2)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1} z^{2k+1}} .$$

b) In questa regione

$$|z| < \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad |4z^2| < 1 ,$$

la $f(z)$ è già nella forma giusta per essere espanso in serie:

$$f(z) = \frac{z}{4z^2 + 1} = z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (4z^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 4^k z^{2k+1} .$$

c) Prima di fare l'espansione in serie, dobbiamo ricordarci che $z = i/2$ è anche un punto singolare della $f(z)$, dunque è necessario imporre un vincolo ulteriore, ossia $0 < |z - i/2| < 1$. In questa corona andiamo a scriverci la funzione come:

$$f(z) = \frac{1}{8} \frac{1}{z - \frac{i}{2}} + \frac{1}{8} \frac{1}{z + \frac{i}{2}} .$$

Il primo termine è già nella forma desiderata, per il secondo con alcune manipolazioni algebriche si ha

$$\frac{1}{8} \frac{1}{z + \frac{i}{2}} = \frac{1}{8} \frac{1}{i + z - \frac{i}{2}} = -\frac{i}{8} \frac{1}{1 - i(z - \frac{i}{2})} = -\frac{i}{8} \sum_{k=0}^{\infty} (i)^k \left(z - \frac{i}{2} \right)^k ,$$

che converge per $|z - i/2| < 1$. In totale dunque l'espansione in serie di Laurent nel dominio cercato sarà:

$$f(z) = \frac{1}{8} \frac{1}{z - \frac{i}{2}} - \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} i^{k+1} \left(z - \frac{i}{2} \right)^k .$$

In questo capitolo andremo a fornire una classificazione precisa dei punti singolari di una funzione nel piano complesso. Vedremo come questi sono connessi alle proprietà della funzione in esame, e ai suoi sviluppi in serie di Laurent.

4.1 Punti singolari	37
4.2 Il teorema dei residui	39
Calcolo dei residui	41
4.3 Il residuo all'infinito	41
4.4 Il residuo logaritmico	45

4.1 Punti singolari

Un punto z_0 del piano complesso si dice punto singolare *isolato* di una funzione $f(z)$, se quest'ultima è univoca e analitica nella corona circolare $0 < |z - z_0| < R_1$ (abbiamo assunto per semplicità $R_2 = 0$), e z_0 è un suo punto singolare. Detto in altri termini un punto è isolato se esiste un suo intorno in cui la funzione non ha altre singolarità.

Andiamo ad esaminare quello che succede attorno a z_0 . Come visto in precedenza, sappiamo che è possibile definire uno sviluppo in serie di Laurent della $f(z)$ che sia convergente nell'anello $0 < |z - z_0| < R_1$. Avremo dunque tre casi possibili a seconda della forma esplicita della funzione in esame:

1. la serie di Laurent non contiene potenze negative dello sviluppo $z - z_0$.
2. La serie di Laurent contiene un numero di potenze negative *finito*.
3. La serie di Laurent contiene un numero *infinito* di potenze negative.

Vediamo in dettaglio ognuno di questi casi.

Se la serie di Laurent non presenta potenza al denominatore allora:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R_1. \quad (4.1)$$

Il limite $z \rightarrow z_0$ della funzione esiste ed è pari al coefficiente dello sviluppo c_0 . In questo caso dunque la $f(z)$ è regolare e la singolarità è detta *eliminabile*. Viceversa, se esiste un numero di potenze negative finito:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R_1, \quad (4.2)$$

con $c_n = 0$ per $n < -N$. In questo caso parliamo di *polo di ordine N*. Sussiste il teorema per cui, se z_0 è un polo di una funzione analitica, allora per $z \rightarrow z_0$ il modulo della funzione diverge indipendentemente da come z tende al punto singolare.

Infine, se il numero di termini a potenza negativa è infinito, il punto z_0 prende il nome di *singolarità essenziale*.

Esempio 4.1.1 Una funzione che presenta una singolarita' essenziale e' data ad esempio da $f(z) = e^{1/z}$, per la quale

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{z^m}{|m|!}, \quad (4.3)$$

che e' caratterizzata da un punto singolare essenziale in $z_0 = 0$.

E' utile fornire una dimostrazione del caso numero 2 visto sopra, in entrambi i versi. Dimostriamo per prima che se la $f(z)$ ha un polo di ordine N , allora il suo sviluppo di Laurent ha un numero finito di potenze negative. Notiamo innanzitutto che un polo di ordine N di una $f(z)$ e' anche uno zero dello stesso ordine per $g(z) = 1/f(z)$. Quest'ultima potra' essere scritta a sua volta come

$$g(z) = (z - z_0)^N \varphi(z), \quad (4.4)$$

in cui $\varphi(z)$ e' analitica attorno a z_0 , e tale che $\varphi(z_0) \neq 0$. Avremo dunque che $\varphi(z)^{-1}$ e' a sua volta analitica e sviluppabile in serie di Taylor:

$$\frac{1}{\varphi(z)} = C_{-N} + (z - z_0)C_{-N+1} + \dots, \quad (4.5)$$

e do conseguenza

$$\frac{1}{g(z)} = f(z) = \frac{C_{-N}}{(z - z_0)^N} + \frac{C_{-N+1}}{(z - z_0)^{N-1}} + \dots, \quad (4.6)$$

Quest'ultimo rappresenta proprio lo sviluppo in serie di Laurent di una $f(z)$ con solo potenze negative $\geq -N$. Viceversa, se $f(z)$ contiene solo termini al denominatore di grado $\geq -N$ allora

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{C_{-N}}{(z - z_0)^N} + \frac{C_{-N+1}}{(z - z_0)^{N-1}} + \frac{C_{-N+2}}{(z - z_0)^{N-2}} + \dots \\ &= (z - z_0)^{-N} [C_{-N} + (z - z_0)C_{-N+1} + \dots] \\ &= (z - z_0)^{-N} \psi(z), \end{aligned} \quad (4.7)$$

con $\psi(z)$ analitica e non nulla in un intorno di z_0 . Allora, l'inverso della precedente:

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^N \psi(z)^{-1}, \quad (4.8)$$

e' analitica intorno a z_0 , con uno zero di ordine N nel punto. Per quanto visto poco prima cio' implica che la $f(z)$ ha un polo di ordine N in z_0 .

Notiamo che le considerazioni fatte fino ad ora sulla corrispondenza tra serie di Laurent e singolarita' valgono per punti z_0 al *finito*.

Nota 4.1.1 Possiamo fornire una definizione di polo (e di zero) di una funzione in termini di limiti. Un punto singolare isolato z_0 e' un polo di ordine N per $f(z)$ se:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 \leq m < N \\ \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{se } m = N \\ 0 & \text{se } m > N, \end{cases}$$

(con m numero intero), ossia se esiste un $l \neq 0$ tale che

$$f(z) = \frac{\ell}{(z - z_0)^N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(z - z_0)^{N-1}}\right), \quad (4.9)$$

per $z \rightarrow z_0$. Allo stesso modo un punto z_0 e' uno zero di ordine N per $g(z)$ se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq m < N \\ \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{se } m = N \\ \infty & \text{se } m > N, \end{cases}$$

ossia se esiste un $l \neq 0$ tale che possiamo scrivere la $g(z)$ come

$$g(z) = \ell(z - z_0)^N + \mathcal{O}[(z - z_0)^{N+1}],$$

per $z \rightarrow z_0$. Dalla (4.9) risulta che se prendiamo l'inversa di $f(z)$ otteniamo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{f(z)} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq m < N \\ 1/\ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{se } m = N \\ \infty & \text{se } m > N, \end{cases}$$

che coincide con la definizione di zero data. Dunque un polo di $f(z)$ corrisponde ad uno zero della sua inversa.

4.2 Il teorema dei residui

Tra i coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent, assume una rilevanza fondamentale il fattore del termine in $(z - z_0)^{-1}$, chiamato *residuo*.

Supponiamo dunque che z_0 sia un punto singolare isolato di $f(z)$, e che attorno ad esso la funzione possa essere sviluppato in serie di Laurent come:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi. \quad (4.10)$$

Definiamo il residuo come

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\xi) d\xi = c_{-1}, \quad (4.11)$$

ossia come il valore dell'integrale di $f(z)$ su una curva chiusa contenuta nel dominio di analiticit  della funzione, e non contenente *nessun altro* punto singolare a parte z_0 . Possiamo dimostrare che il residuo e' proprio il coefficiente c_{-1} con alcuni semplici passaggi, espandendo in serie di Laurent la funzione dentro l'integrale (4.11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{(n,-1)} c_n = c_{-1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

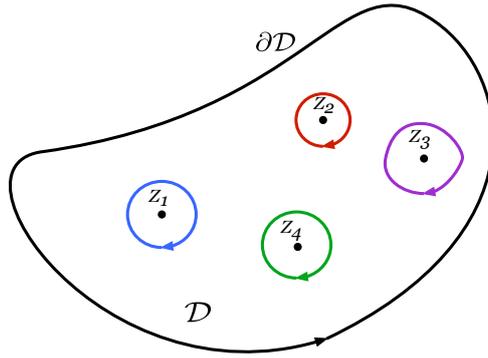


Figure 4.1: Rappresentazione di un dominio chiuso contenente un numero finito n di singolarità $z_{j=1,\dots,n}$, ciascuna circondata da un cammino arbitrario γ_j . Notare che cammino esterno e cammini interni sono percorsi in senso opposto.

Quanto visto sin qui può essere generalizzato ad un numero finito di singolarità isolate, secondo il *teorema fondamentale dei residui*, che andremo qui ad enunciare e dimostrare.

Teorema 4.2.1 Sia data una $f(z)$ analitica in un dominio chiuso \bar{D} , ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate (z_1, z_2, \dots, z_n) . L'integrale della funzione lungo un cammino chiuso interamente contenuto nel dominio sarà dato da

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k] = 2\pi i \sum_{k=1}^n c_{-1}^{(k)}, \quad (4.13)$$

con $c_{-1}^{(k)}$ coefficiente in $(z - z_0)^{-1}$ dello sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ corrispondente alla k -esima singolarità.

Prima di dimostrare questo teorema è fondamentale notare come l'equazione (4.13) fornisca una relazione assolutamente non banale tra l'integrale della funzione $f(z)$ e il suo sviluppo in serie di Laurent. In particolare il teorema connette una proprietà *globale*, ossia il calcolo di un integrale su un contorno chiuso, con il calcolo di quantità *locali*, date dal residuo della funzione in uno o più punti specifici. Per la dimostrazione facciamo ricorso al teorema di Cauchy per domini molteplicemente connessi, secondo il quale l'integrale di $f(z)$ lungo la frontiera del dominio ∂D è pari alla somma degli integrali valutati lungo piccoli cammini γ_j che circondano ciascuna singolarità all'interno del contorno chiuso, come mostrato in Fig. 4.1. Avremo dunque

$$\oint_{\partial D} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz = 0, \quad (4.14)$$

e ricordando che per ciascun punto singolare vale l'espressione (4.11) si ha

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}[f(z), z_i]. \quad (4.15)$$

Notiamo infine come il teorema dei residui ci fornisce un vantaggio pratico, dato che a volte (nella maggior parte dei casi) calcolare il residuo risulta molto più semplice che valutare l'integrale della funzione.

Calcolo dei residui

Andiamo a studiare alcuni casi in cui e' possibile calcolare il residuo di una funzione in modo semplice.

- a) Se $f(z)$ contiene un polo di ordine N in z_0 , allora il residuo puo' essere calcolato come

$$c_{-1} = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} [(z-z_0)^N f(z)], \quad (4.16)$$

da cui per $N = 1$ otteniamo immediatamente

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)]. \quad (4.17)$$

Andiamo a dimostrare l'eq. (4.16). Da quanto visto in precedenza, la funzione $f(z)$ ammettera' in generale uno sviluppo in serie di Laurent dato da

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots, \quad (4.18)$$

e moltiplicando ambo i membri per $(z-z_0)^m$ si ha:

$$(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \dots. \quad (4.19)$$

Applicando la derivata $(m-1)$ -esima all'espressione precedente, e passando al limite per $z \rightarrow z_0$ vediamo che l'unico termine che sopravvive e' proprio il coefficiente c_{-1} , ossia il residuo della funzione nel polo.

- b) Se la funzione di partenza puo' essere scritta come $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$ con f_1 e f_2 analitiche, e f_2 con uno zero semplice in z_0 , si ha

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}. \quad (4.20)$$

La dimostrazione della precedente e' immediata. Dalle ipotesi iniziali sulle due funzioni $f_{1,2}$ possiamo scrivere $f(z)$ come

$$f(z) = \frac{f_1(z_0) + \mathcal{O}(z-z_0)}{(z-z_0)f_2'(z_0) + \mathcal{O}(z-z_0)^2}. \quad (4.21)$$

Applicando all'equazione precedente quando visto al punto a) per un polo semplice, ossia $\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)]$, si ha:

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z_0) + \mathcal{O}(z-z_0)}{f_2'(z_0) + \mathcal{O}(z-z_0)} = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}. \quad (4.22)$$

4.3 Il residuo all'infinito

Fino ad ora abbiamo considerato ed analizzato le proprieta' di residui al finito. Introduciamo ora il concetto di residuo all'infinito. Data una funzione $f(z)$ definiamo il suo residuo all'infinito come

$$\text{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (4.23)$$

con γ curva chiusa grande a sufficienza da contenere tutte le singolarita' al finito, e percorsa in senso *orario*, in modo da avere a sinistra l'intorno del punto $z = \infty$. Possiamo ricondurre il calcolo del residuo al finito a quello di uno al finito, utilizzando la trasformazione $z = 1/\tau$, tale che

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), \infty] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f\left(\frac{1}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau^2} \\ &= -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{\tau}\right) \frac{1}{\tau^2}, 0\right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Confrontando il residuo a destra e sinistra vediamo un segno meno, che viene fuori dal fatto che il cambio di variabile modifica il senso di percorrenza del cammino. Notiamo infine che, come mostrato in Fig. 4.2, la mappa da z a τ cambia la disposizione dei poli da dentro a fuori al percorso di integrazione, dunque l'unico polo di cui e' necessario tenere conto e' quello in $\tau = 0$ (all'interno di γ).

Per il calcolo del residuo all'infinito possiamo usufruire di alcune semplici identita' di calcolo. In particolare se

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0 \quad \longrightarrow \quad \operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\lim_{|z| \rightarrow \infty} [z \cdot f(z)], \quad (4.25)$$

mentre se

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = c \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \operatorname{Res}[f(z), \infty] = \lim_{|z| \rightarrow \infty} [z^2 \cdot f'(z)]. \quad (4.26)$$

Notiamo infine come esistano funzioni regolari all'infinito, ma per cui $\operatorname{Res}[f(z), \infty] \neq 0$, come ad esempio $f(z) = 1/z$.

Il residuo all'infinito e' di fondamentale importanza per dimostrare il seguente teorema:

Teorema 4.3.1 *Sia $f(z)$ una funzione analitica in $\bar{\mathbb{C}}$, eccetto per un numero finito di singolarita' isolate z_1, \dots, z_n , e dell'eventuale polo all'infinito. Avremo allora che*

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_j] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0. \quad (4.27)$$

La dimostrazione di questo teorema e' immediata. Consideriamo infatti una $f(z)$ che soddisfi le ipotesi del nostro enunciato, e integramola su una curva chiusa che contenga tutte le singolarita' al finito:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_j]. \quad (4.28)$$

In accordo con la definizione del residuo all'infinito avremo inoltre

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_j], \quad (4.29)$$

da cui segue la dimostrazione del teorema.

Alcune applicazioni di quanto visto sino ad ora.

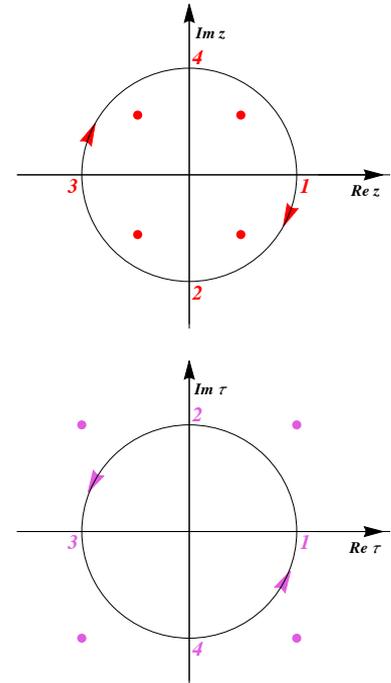


Figure 4.2: Rappresentazione dei piani z e τ , e di come i punti nel piano s muovono a causa dl cambio di variabile $z = 1/\tau$.

Esempio 4.3.1 Determinare il tipo di singolarità delle seguenti funzioni e in caso calcolarne il residuo:

$$\begin{aligned} a) f(z) &= \frac{1}{z^2}, \quad b) f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad c) f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3}, \\ d) f(z) &= \frac{\sin \pi z}{z^2(z - \frac{3}{2})^2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

a) In questo caso vediamo subito che la funzione ha un polo del secondo ordine in $z = 0$. Possiamo vederlo (ad esempio) come

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z - z_0)^2 \frac{1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} (z - z_0)^2 \frac{1}{z^2} = 1.$$

Possiamo calcolare il residuo utilizzando la (4.16) con $N = 2$:

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{1}{z^2} \right] = 0.$$

b) Per semplificare i conti, andiamo a scrivere la funzione come

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z - i} + \frac{1}{2} \frac{1}{z + i},$$

Vediamo subito che la $f(z)$ ha due punti singolari, entrambi di ordine 1, in $z_1 = i$ e $z_2 = -i$. Avremo dunque:

$$\text{Res}[f(z), z_1] = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z - i) \frac{z}{z^2 + 1} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{z}{z + i} \right] = \frac{1}{2},$$

e

$$\text{Res}[f(z), z_2] = \lim_{z \rightarrow -i} \left[(z + i) \frac{z}{z^2 + 1} \right] = \lim_{z \rightarrow -i} \left[\frac{z}{z - i} \right] = \frac{1}{2}.$$

c) La funzione ha un polo doppio in $z = 0$. Per vederlo possiamo calcolando il limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{e^z - 1}{z^3} = 1,$$

oppure facendo uno sviluppo in serie attorno a $z = 0$ sfruttando risultati noti per l'esponenziale:

$$\frac{e^z - 1}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6} + \dots$$

Notiamo che la precedente rappresenta proprio lo sviluppo di Laurent per $0 < |z| < \infty$ da cui inferiamo l'ordine nel polo, e automaticamente anche il residuo, pari a $1/2$.

d) In questo caso sfruttiamo l'espansione in serie del $\sin \pi z$ ($\forall z \in \mathbf{C}$):

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi z)^{2n+1} \frac{1}{z^2(z - 3/2)^2} = \frac{\pi z + \mathcal{O}(z^3)}{z^2(z - 3/2)^2} \\ &= \frac{\pi}{z(z - 3/2)^2} + \frac{\pi \mathcal{O}(z)}{(z - 3/2)^2}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

da cui si vede immediatamente che $z = 0$ è polo semplice, e $z = 3/2$ è

polo doppio:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \frac{4\pi}{9},$$

e

$$\lim_{z \rightarrow 3/2} \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 f(z) = -\frac{4}{9}.$$

I residui saranno dati a loro volta da:

$$\text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \frac{4\pi}{9},$$

e

$$\text{Res}\left[f(z), \frac{3}{2}\right] = \lim_{z \rightarrow 3/2} \frac{d}{dz} \left[\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 f(z) \right] = \frac{16}{27}.$$

Per calcolare i residui (e l'ordine del polo) avremmo potuto trovare lo sviluppo in serie di Laurent appropriato, dunque manipolando i termini di $f(z)$ in modo da ottenere uno sviluppo in potenze di z o $z - 3/2$ a seconda dei casi. Per $z = 3/2$ andiamo a vedere come poter espandere i vari pezzi della nostra funzione. La parentesi al denominatore con $(z - 3/2)^2$ ha già lo sviluppo trovato. Per quanto riguarda $1/z^2$ notiamo che:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{4}{9} \frac{1}{\left(1 + \frac{z-3/2}{3/2}\right)^2} = \frac{4}{9} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{z-3/2}{3/2}}\right)',$$

dove con l'apice abbiamo definito la derivata rispetto a z . Possiamo dunque espandere in serie per $0 < |z - 3/2| < 3/2$ la quantità tra parentesi usando le proprietà della serie geometrica, e poi farne la derivata, ossia

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{2}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - 3/2)^n}{(3/2)^n} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (-1)^{n+1} n \left(z - \frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

Per quanto riguarda il seno al numeratore

$$\begin{aligned} \sin \pi z &= \sin \pi \left[\left(z - \frac{3}{2}\right) + \frac{3\pi}{2} \right] \\ &= \sin \pi \left(z - \frac{3}{2}\right) \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \pi \left(z - \frac{3}{2}\right) \sin \frac{3\pi}{2} \\ &= -\cos \pi \left(z - \frac{3}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n}}{(2n)!} \left(z - \frac{3}{2}\right)^{2n} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Mettiamo ora tutto insieme e otteniamo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - 3/2)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n}}{(2n)!} \left(z - \frac{3}{2}\right)^{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (-1)^{n+1} n \left(z - \frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{(z - 3/2)^2} \left[-1 + \frac{1}{2} \pi^2 \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 + \dots \right] \left[\frac{4}{9} - \frac{16}{27} \left(z - \frac{3}{2}\right) + \dots \right] \\ &= -\frac{4}{9} \frac{1}{\left(z - \frac{3}{2}\right)^2} + \frac{16}{27} \frac{1}{z - \frac{3}{2}} + \dots \end{aligned}$$

[Avremmo potuto usare $f^{(n)}(z_0)/n! = c_n$?

4.4 Il residuo logaritmico

Consideriamo una funzione $f(z)$ definita in un dominio \mathcal{D} , e ivi analitica eccetto un numero finito di poli $z_{k=1,\dots,p}$. Supponiamo inoltre che sulla frontiera del dominio non ci siano ne' zeri ne' punti singolari di della funzione. Il rapporto

$$\varphi(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (4.33)$$

prende il nome di *derivata logaritmica* di $g(z)$ e i residui di $g(z)$ nei suoi punti singolari $z_{m=1,\dots,M}$ *residui logaritmici* di $g(z)$. A partire dalla (4.33) e' immediato vedere che le singularita' di $\varphi(z)$ saranno dati dagli $z_{k=1,\dots,p}$ poli e dai $\tilde{z}_{k=1,\dots,n}$ zeri di $f(z)$. Supponiamo dunque che $z = \tilde{z}_k$ sia uno zero di ordine n_k : in un intorno di questo punto avremo

$$g(z) = (z - \tilde{z}_k)^{n_k} g_1(z), \quad (4.34)$$

con \tilde{z}_k punto regolare di $g_1(z)$, tale che $g_1(\tilde{z}_k) \neq 0$, e

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{g'(z)}{g(z)} = (\log[g(z)])' = n_k [\log(z - \tilde{z}_k)]' + (\log[g_1(z)])' \\ &= \frac{n_k}{z - \tilde{z}_k} + \frac{g_1'(z)}{g_1(z)}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Dalla precedente segue che \tilde{z}_k e' un polo del primo ordine della funzione $\varphi(z)$, e il residuo in questo punto e' dato proprio da n_k . Abbiamo dunque trovato che in uno zero di ordine k di $f(z)$, il suo residuo logaritmico e' uguale all'ordine dello zero

$$\text{Res} \left[\frac{g'(z)}{g(z)}, \tilde{z}_k \right] = n_k. \quad (4.36)$$

Supponiamo ora che z_k sia un polo di ordine p_k di $g(z)$. Nel suo intorno

$$g(z) = \frac{g_1(z)}{(z - z_k)^{p_k}}, \quad (4.37)$$

con $g_1(z)$ regolare in z_k e $g_1(z_k) \neq 0$. Calcoliamo la derivata logaritmica

$$\varphi(z) = -\frac{g_1(z)}{(z - z_k)^{p_k+1}} \frac{p_k}{g(z)} + \frac{g_1'(z)}{(z - z_k)^{p_k}} \frac{1}{g(z)} = -\frac{p_k}{z - z_k} + \frac{g_1'(z)}{g_1(z)}, \quad (4.38)$$

da cui troviamo che z_k e' anche un polo di $\varphi(z)$ con residuo p_k . Di conseguenza, in un polo di ordine p_k di $g(z)$ il residuo logaritmico e' uguale all'ordine del polo preso con segno opposto:

$$\text{Res} \left[\frac{g_1(z)}{g(z)}, z_k \right] = -p_k. \quad (4.39)$$

Questi due risultati ci permettono di formulare il seguente teorema, detto *dell'indice*:

Teorema 4.4.1 Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio chiuso $\bar{\mathcal{D}}$, eccetto un numero finito di punti singolari z_k all'interno di \mathcal{D} . Supponiamo

che tutti i z_k siano poli e che $f(z)$ non si annulli mai sulla frontiera ∂D . Allora la differenza tra il numero di zeri e il numero di poli di $f(z)$ in \mathcal{D} e' dato da:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (4.40)$$

in cui poli e zeri sono contati con la loro molteplicita', ossia

$$N = \sum_{k=1}^n n_k, \quad P = \sum_{k=1}^p p_k. \quad (4.41)$$

Per dimostrare il teorema andiamo a risolvere l'integrale sulla derivata logaritmica con il metodo dei residui:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} \varphi(z) dz &= 2\pi i \sum_{j=1}^M \text{Res} [\varphi(z), z_j] = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^n n_k - \sum_{l=1}^p p_l \right] \\ &= 2\pi i (N - P). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Il teorema appena dimostrato ha un'interpretazione geometrica molto semplice in termini del numero di giri che la funzione $w = f(z)$ compie attorno a $w = 0$. Per capirlo andiamo a riscrivere la (4.40) nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} d \log[f(z)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} d \{ \log |f(z)| + i \arg[f(z)] \} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} d \log |f(z)| + \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} d \arg[f(z)]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

La funzione $\log |f(z)|$ e' reale e univoca e la sua variazione e' nulla quando ci si muove attorno al percorso chiuso ∂D compiendo un giro totale, dunque il primo termine della precedente e' zero. Ne risulta che

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \text{Var} \{ \arg[f(z)] \}_{\partial D}, \quad (4.44)$$

ossia che la differenza tra il numero di zeri e il numero di poli e' dato dalla variazione dell'argomento di $f(z)$ quando z si muove lungo la frontiera ∂D , ossia dal numero di giri che compie attorno a $w = f(z) = 0$.

Questo risultato ci porta al *teorema di Rouché*:

Teorema 4.4.2 Siano $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni analitiche nel dominio $\tilde{\mathcal{D}}$ tali che sulla frontiera valga la disuguaglianza

$$|f(z)|_{\partial D} > |g(z)|_{\partial D}. \quad (4.45)$$

Allora il numero totale di zeri della funzione $F(z) = f(z) + g(z)$ in \mathcal{D} e' uguale al numero totale di zeri di $f(z)$.

La dimostrazione e' la seguente. Supponiamo che per $F(z) = g(z) + f(z)$ e $f(z)$ valgano tutte le ipotesi del teorema, tale che

$$|F(z)|_{\partial D} = |f(z) + g(z)|_{\partial D} \geq |f(z)|_{\partial D} - |g(z)|_{\partial D} > 0. \quad (4.46)$$

Dalla (4.44) sappiamo però che dato il numero di zeri di $g(z)$ e $f(z)$:

$$N[f(z) + g(z)] = \frac{1}{2\pi} \text{Var} \{ \text{arg}[f(z) + g(z)] \}_{\partial D} ,$$

$$N[f(z)] = \frac{1}{2\pi} \text{Var} \{ \text{arg}[f(z)] \}_{\partial D} ,$$

da cui la loro differenza

$$\begin{aligned} N[f(z) + g(z)] - N[f(z)] &= \frac{1}{2\pi} \text{Var} \{ \text{arg}[f(z) + g(z)] - \text{arg}[f(z)] \}_{\partial D} \\ &= \text{Var} \left\{ \text{arg} \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] \right\}_{\partial D} \\ &= \text{Var} \{ \text{arg}(w) \}_{\partial D} , \end{aligned} \quad (4.47)$$

avendo definito $1 + \frac{g(z)}{f(z)}$. Quando z si muove descrivendo il contorno ∂D , il punto w corrispondente genera una curva \mathcal{S} che è interna al cerchio $|w - 1| = \rho_0 < 1$ data la condizione (4.46). Dunque $w = 0$ giace al di fuori della curva \mathcal{S} (a sua volta inscritta nel cerchio di raggio minore di uno), ossia per quanto detto in precedenza:

$$\text{Var} \{ \text{arg}(w) \}_{\partial D} = 0 \quad \longrightarrow \quad N[f(z) + g(z)] = N[f(z)] . \quad (4.48)$$

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 4.4.1 Determinare il numero totale di zeri di

$$a) F(z) = z^7 + 5z^6 - 3z^5 + 11z^2 + 1 \quad , \quad b) F(z) = e^z + 3z^n .$$

all'interno di $|z| < 1$.

a) Andiamo a scomporre la $F(z) = f(z) + g(z)$ con $f(z) = 11z^2$ e $g(z) = z^7 + 5z^6 - 3z^5 + 1$ e vediamo che

$$|f(z)|_{|z|=1} = 11 \quad , \quad |g(z)|_{|z|=1} .$$

Abbiamo dunque trovato due funzioni tali che $|f(z)|_{|z|=1} > |g(z)|_{|z|=1} > 0$. Dunque, il numero di zeri di $F(z)$ in $|z| < 1$ è uguale al numero totale di zeri della $f(z)$, pari a 2, ossia $z = 0$ con molteplicità 2.

b) In questo caso identifichiamo $f(z) = 3z^n$ e $g(z) = e^z$. Sulla frontiera $\Gamma = |z| = 1$ avremo $|f(z)|_{\Gamma} = |3z^n|_{\Gamma} = 3$, mentre

$$|g(z)|_{\Gamma} = |e^{\text{Re}(z) + i\text{Im}(z)}|_{\Gamma} = |e^{\text{Re}z}|_{\Gamma} \leq e .$$

Le due funzioni soddisfano la disuguaglianza $|f(z)|_{\Gamma} > |g(z)|_{\Gamma}$, tale che gli zeri di $F(z)$ nel dominio dato saranno quelli di $f(z)$, dati da $z = 0$ con molteplicità n .

Infine, andiamo ad enunciare il *teorema fondamentale dell'algebra*:

Teorema 4.4.3 *Un polinomio di grado n possiede nel piano complesso un mero di zeri, contati con la loro molteplicità, esattamente uguali a n .*

Possiamo dimostrare l'enunciato in modi diversi. Qui andremo a utilizzare proprio il teorema di Rouché. Rappresentiamo il polinomio $F(z)$

come:

$$F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = f(z) + g(z), \quad (4.49)$$

con $f(z) = a_0 z^n$ e $g(z) = a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. Sul cerchio di raggio $|z| = R$,

$$|f(z)| = |a_0| R^n, \quad (4.50)$$

$$|g(z)| \leq |a_1| R^{n-1} + \cdots + |a_n|, \quad (4.51)$$

e dunque

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{|a_1| R^{n-1} + \cdots + |a_n|}{|a_0| R^n}. \quad (4.52)$$

Dato che R è generico, possiamo sempre scegliere un valore tale che, a coefficienti fissati, il rapporto sia minore di 1. In virtù del teorema di Rouché tuttavia, la relazione precedente implica che il numero totale di zeri di $F(z)$ è uguale, all'interno del cerchio $|z| = R$, al numero di zeri di $f(z) = a_0 z^n$. Ma $a_0 z^n$ ha in tutto il piano un solo zero di molteplicità n , ossia $z = 0$. L'arbitrarietà di R chiude la dimostrazione del teorema.

Il teorema dei residui rappresenta uno strumento incredibilmente potente e versatile per risolvere una vasta classe di integrali, che giocano un ruolo cruciale in molte applicazioni fisiche. In questo capitolo andremo a vedere l'approccio generale, ed i relativi esempi, con cui applicare quanto visto in precedenza a integrali con una forma funzionale specifica.

5.1 Integrali trigonometrici

Il primo caso che andremo ad affrontare e' quello di integrali della forma

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \quad (5.1)$$

con R una funzione razionale generica dei suoi argomenti, ossia di variabili trigonometriche. Questi integrali possono essere riscritti in termini di una variabile complessa definita su una curva chiusa. A tale scopo consideriamo $z = e^{i\theta}$, per cui:

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}. \quad (5.2)$$

Possiamo dunque riscrivere seno e coseno come:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (5.3)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right). \quad (5.4)$$

Quando θ varia da 0 a 2π la variabile z descrive un contorno chiuso, dato dalla circonferenza $|z| = 1$, percorsa nel senso positivo. In questo modo l'integrale di partenza (5.1) diviene:

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R \left(z + \frac{1}{z}, z - \frac{1}{z} \right) \frac{dz}{z}. \quad (5.5)$$

In virtua' delle proprietaa' delle funzioni analitiche, l'integrando deve potersi scrivere come

$$\tilde{R}(z) = \frac{R(z)}{z} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}, \quad (5.6)$$

che e' analitica ovunque all'interno della circonferenza unitaria, eccetto per un numero finito di punti singolari $N \leq n$ che sono gli zeri del denominatore. In virtua' di quanto visto per il teorema dei residui avremo dunque

$$I = \sum_{k=1}^N \frac{2\pi i}{i} \text{Res}[\tilde{R}(z), z_k]. \quad (5.7)$$

5.1 Integrali trigonometrici . . .	49
Integrali sull'asse reale . . .	51
5.2 Integrali di Fourier	54
5.3 Integrali di funzioni polidrome	57
Integrali del tipo $\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$ con $\alpha \in \mathbb{R}$	57
Integrali del tipo $\int_0^\infty f(x) \log^n(x) dx$	60
Integrali del tipo $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{(1-x)^\alpha} f(x) dx$	64
Integrali del tipo $\int_0^\infty x^\alpha \log(x) f(x) dx$	67
5.4 Integrali impropri con singolarita' sull'asse reale	69
5.5 La trasformata di Laplace inversa	74
5.6 Gli integrali di Fresnel . . .	77
5.7 La trasformata di Fourier della Gaussiana	78

Se α_k e' l'ordine del polo k -esimo, allora possiamo scrivere

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^N \frac{1}{(\alpha_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{\alpha_k - 1}}{dz_k^{\alpha_k - 1}} [(z - z_k)^{\alpha_k} \tilde{R}(z)]. \quad (5.8)$$

Andiamo a vedere alcuni esempi specifici.

Esempio 5.1.1 Calcoliamo l'integrale trigonometrico

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}, \quad |a| < 1. \quad (5.9)$$

Ponendo $z = e^{i\theta}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{1}{1 + \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{2z}{a + 2z + az^2} \\ &= \frac{2}{i} \int_{|z|=1} dz \frac{1}{a + 2z + az^2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Studiano i poli del denominatore dell'integranda vediamo che questo ha due radici

$$z_{\pm} = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1},$$

entrambe poli del primo ordine. Dato che $|a| < 1$, $1/a^2 > 1$, e dunque solo uno dei due punti singolari cade all'interno del dominio di integrazione, ossia quello con il segno positivo di fronte alla radice.

Usando la formula (4.16) nel caso di polo semplice otteniamo:

$$I_1 = \frac{2}{i} 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_+} \left[(z - z_+) \frac{1}{a(z - z_+)(z - z_-)} \right] = 4\pi \frac{1}{a(z_+ - z_-)}. \quad (5.11)$$

Poiche' $z_+ - z_- = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} + \frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} = 2\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$ avremo in totale:

$$I_1 = \frac{4\pi}{2a} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}. \quad (5.12)$$

Esempio 5.1.2 Consideriamo l'integrale

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}, \quad a > 0. \quad (5.13)$$

Passando al piano complesso abbiamo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{i} \int_{\gamma=|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{1}{a^2 + \frac{1}{4i^2} \left(z - \frac{1}{z}\right)^2} = -\frac{4}{i} \int_{\gamma} dz \frac{z}{(z^2 - 1)^2 - 4a^2 z^2} \\ &= -\frac{4}{i} \int_{\gamma} dz \frac{z}{(z^2 - 1 - 2az)(z^2 - 1 + 2az)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

In questo caso avremo 4 radici al denominatore:

$$\begin{aligned} (z^2 - 1 - 2az) &\rightarrow z_{\pm}^{(1)} = a \pm \sqrt{a^2 + 1}, \\ (z^2 - 1 + 2az) &\rightarrow z_{\pm}^{(2)} = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

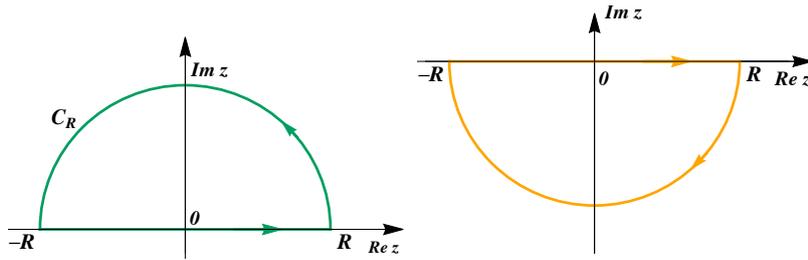


Figure 5.1: Contorno chiuso composto dal segmento $[-R, R]$ e da quello dalla semi circonferenza C_R usato nel teorema (5.1.1). Il cammino puo' essere chiuso sopra (verde) o sotto (giallo), ma il verso di percorrenza cambia.

Essendo $a > 0$ solo $z_-^{(1)}$ e $z_+^{(2)}$ si trovano all'interno della circonferenza γ . Possiamo dunque usare il teorema dei residui

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -\frac{4}{i} \left\{ \text{Res}[f(z), z_-^{(1)}] + \text{Res}[f(z), z_+^{(2)}] \right\} \\
 &= -8\pi \left[\lim_{z \rightarrow z_-^{(1)}} \frac{z(z - z_-^{(1)})}{(z - z_-^{(1)})(z - z_+^{(1)})(z - z_-^{(2)})(z - z_+^{(2)})} + \right. \\
 &\quad \left. \lim_{z \rightarrow z_+^{(2)}} \frac{z(z - z_+^{(2)})}{(z - z_-^{(1)})(z - z_+^{(1)})(z - z_-^{(2)})(z - z_+^{(2)})} \right] \\
 &= -8\pi \left[\frac{a - \sqrt{1 + a^2}}{(-2\sqrt{a^2 + 1})(2a)(2a - 2\sqrt{a^2 + 1})} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{-a + \sqrt{a^2 + 1}}{(-2a)(-2a + 2\sqrt{a^2 + 1})(2\sqrt{a^2 + 1})} \right] \\
 &= 8\pi \left(\frac{1}{8a\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{1}{8a\sqrt{a^2 + 1}} \right) = \frac{2\pi}{a\sqrt{a^2 + 1}}. \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

Integrali sull'asse reale

Come seconda applicazione del teorema dei residui andremo a considerare integrali su tutto l'asse reale, da $-\infty$ a ∞ , che sono prolungabili nel semipiano superiore o inferiore del piano complesso. Per prima cosa consideriamo il seguente teorema¹

Teorema 5.1.1 *Supponiamo che, data una $f(x)$ definita su tutto \mathbf{R} , questa possa essere prolungata analiticamente nel piano complesso $\text{Im}(z) \geq 0$. Se $f(z)$ e' analitica nel semipiano appena definito, eccetto per un numero di punti singolari isolati, e esistono R_0, M, δ tali che $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$ con $|z| > R_0$, allora*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0, \tag{5.17}$$

dove C_R rappresenta il semicerchio di raggio R percorso in senso antiorario nel piano complesso $\text{Im}(z) \geq 0$. Se la funzione di partenza $f(x)$ non ha punti singolari sull'asse reale, allora per il teorema fondamentale dei residui:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}[f(z), z_j], \tag{5.18}$$

con z_j punti singolari della $f(z)$ nel piano complesso.

Il passo logico sotteso dalla (5.18) e' che, se $f(x)$ e' prolungabile nel semipiano superiore a $f(z)$, questa puo' essere integrata su un dominio

1: Il risultato presentato qui non e' altro che conseguenza di quanto visto per gli integrali sugli archi infiniti trattati nel capitolo precedente. Le ipotesi del teorema equivalgono infatti alla richiesta che $z f(z) \rightarrow 0$ uniformemente.

chiuso composto da due pezzetti: il segmento² $(-R, R)$, e la semicirconferenza che da R sale nel semipiano immaginario positivo (o scende in quello negativo) per poi *riagganciarsi* sull'asse reale a $-R$ (si veda figura al lato). L'integrale su questo cammino chiuso puo' essere risolto sfruttando il teorema sui residui, e coincidera' con quello di partenza su \mathbf{R} se la funzione soddisfa le ipotesi del teorema, dato che nel limite $R \rightarrow \infty$, ossia quando il semicerchio si *chiude* all'infinito, l'integrale su di esso va a zero. In modo piu' rigoroso, dato il cammino chiuso nel semipiano superiore Γ come in Figura (5.1)

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \int_{-R}^R f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz, \quad (5.19)$$

ma

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{M}{R^{1+\delta}} 2\pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (5.20)$$

Mandando R a infinito e usando il teorema dei residui la (5.19) coincide con il risultato del teorema enunciato.

Prima di vedere esempi concreti facciamo un paio di osservazioni aggiuntive. Innanzitutto il risultato appena enunciato si estende anche ad un cammino chiuso nel semipiano immaginario negativo, a patto che la funzioni soddisfi le ipotesi del teorema. Inoltre, se la funzione $f(x)$ e' pari allora

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}[f(z), z_j]. \quad (5.21)$$

Esempio 5.1.3 Calcolare il valore dei seguenti integrali:

$$a) \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} \quad , \quad b) \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(z - 2i)}.$$

Consideriamo I_1 . La $f(x)$ e' analitica su tutto il piano reale e prolungabile analiticamente in $\text{Im}(z) > 0$. Consideriamo dunque l'integrale sul percorso chiuso C come in Fig. 5.2 (pannello superiore) tale che

$$\oint_C f(z)dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz \right].$$

Sappiamo come calcolare il primo integrale a sinistra sul cammino chiuso tramite il metodo dei residui. La funzione $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ ha singolarita' isolate per $z^4 + 1 = (z^2 - i)(z^2 + i) = 0$, che ha come soluzioni $z_{\pm}^{(1)} = \pm e^{i\pi/4}$ e $z_{\pm}^{(2)} = \pm e^{-i\pi/4}$. Di queste quattro solo $z_+^{(1)}$ e $z_-^{(2)}$ cadono all'interno del semipiano positivo $\text{Im}(z) > 0$ e sono poli

2: Che nel limite $R \rightarrow \infty$ si estendera' a tutto l'asse reale.

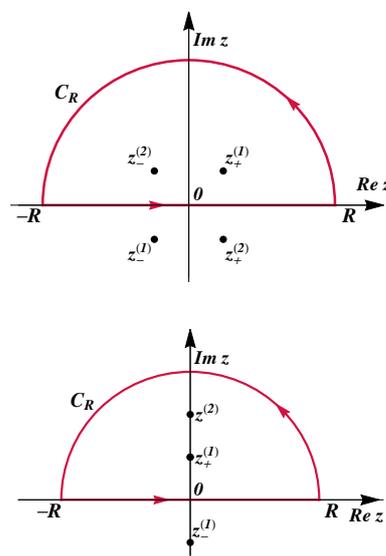


Figure 5.2: Contorni chiusi su cui vengono effettuati gli integrali a) dell'esercizio (5.1.3), e singolarita della funzione integranda.

semplici. Utilizzando la relazione 4.16 otteniamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), z_+^{(1)}] &= \lim_{z \rightarrow z_+^{(1)}} \left[\frac{1}{(z - z_+^{(1)})(z - z_+^{(2)})(z - z_-^{(2)})} \right] \\ &= [(e^{i\pi/4} + e^{i\pi/4})(e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4})(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4})]^{-1} \\ &= \frac{1}{\left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(2i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2i\sqrt{2}(1+i)}. \end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), z_-^{(2)}] &= \lim_{z \rightarrow z_-^{(2)}} \left[\frac{1}{(z - z_+^{(1)})(z - z_+^{(1)})(z - z_+^{(2)})} \right] \\ &= [(-e^{-i\pi/4} - e^{i\pi/4})(-e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4})(-e^{-i\pi/4} - e^{-i\pi/4})]^{-1} \\ &= \frac{1}{\left(-2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(2i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2i\sqrt{2}(1-i)}. \end{aligned}$$

Sommando i due contributi si ha

$$2\pi \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}[f(z), z_j] = 2\pi i \frac{1}{2i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Andiamo a studiare ora l'integrale sul semicerchio C_R

$$I_{C_R} = \int_{C_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz = \left|_{z=Re^{i\theta}} = i \int_0^\pi \frac{e^{i\theta} R d\theta}{R^4 e^{4i\theta} + 1}.$$

Avremo a questo punto che:

$$|I_{C_R}| \leq \int_0^\pi \left| i \frac{e^{i\theta} R d\theta}{R^4 e^{4i\theta} + 1} \right| \leq \int_0^\pi \frac{R d\theta}{R^4 - 1} = \frac{\pi R}{R^4 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Possiamo dunque applicare il teorema visto in precedenza tale che nel limite in cui deformiamo il cammino di integrazione all'infinito:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \oint_C f(z) dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Andiamo a considerare il secondo integrale. In questo caso la funzione $f(z)$ ha tre poli isolati in corrispondenza di $z_\pm^{(1)} = \pm i$ e $z^{(2)} = 2i$. Una volta chiuso il cammino di integrazione nel semipiano superiore, solo $z_+^{(1)}$ e $z^{(2)}$ vi cadono dentro. Avremo dunque

$$\operatorname{Res}[f(z), z_+^{(1)}] = \frac{1}{2i(-i)} = \frac{1}{2},$$

e

$$\operatorname{Res}[f(z), z^{(2)}] = \frac{1}{i(-3i)} = -\frac{1}{3},$$

e sommando i due contributi si ha

$$2\pi \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}[f(z), z_j] = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi i}{3}.$$

Come in precedenza valutiamo il modulo dell'integrale sul cammino circolare:

$$|I_{C_R}| \leq \int_0^\pi \left| i \frac{e^{i\theta} R d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R e^{i\theta} - 2i)} \right| \leq \int_0^\pi \frac{R d\theta}{(R^2 - 1)(R - 2)}$$

$$= \frac{\pi R}{(R^2 - 1)(R - 2)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

in cui abbiamo usato per la maggiorazione la disuguaglianza triangolare inversa $|x - y| \geq ||x| - |y||$. Risommando tutti i contributi avremo dunque il risultato finale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x - 2i)} = \frac{\pi i}{3}.$$

5.2 Integrali di Fourier

Un caso estremamente interessante in cui applicare il teorema dei residui è quello in cui, a partire da una funzione $f(x)$, se ne definisce un'altra tramite il seguente operatore integrale:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx \quad k \in \mathbf{R}. \quad (5.22)$$

La $F(k)$ prende il nome di *trasformata di Fourier*, ed ha un numero di applicazioni pressoché illimitato. Il calcolo della trasformata si semplifica se teniamo in considerazione il teorema dei residui, sostituendo l'integrale precedente con uno chiuso nel piano complesso, e supponendo che la funzione $f(z)$ soddisfi il lemma di Jordan. In questo caso avremo:

Teorema 5.2.1 *Data una funzione $f(x)$ definita su tutto l'asse reale, se essa può essere prolungata nel piano complesso, e' ivi analitica ad eccezione di un numero finito di punti singolari isolati (z_1, \dots, z_n) che non giacciono sull'asse reale, e soddisfa il lemma di Jordan, allora*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} [e^{ikz} f(z), z_k]. \quad (5.23)$$

La dimostrazione dell'enunciato è immediata, e discende dal teorema dei residui che ci permette di calcolare l'integrale sulla curva (vedi Fig. 5.1),

$$\oint_{\gamma} e^{ikz} f(z) dz = \int_{-R}^R e^{ikz} f(z) dz + \int_{C_R} e^{ikz} f(z) dz,$$

dove γ è percorso dato dal segmento $[-R, R]$ e dal semicerchio C_R , di raggio R , percorso in senso antiorario (o orario) e chiuso nel semipiano complesso superiore $\text{Im}(z) \geq 0$ (o inferiore $\text{Im}(z) \leq 0$) per $k > 0$ ($k < 0$). Nel limite $R \rightarrow \infty$ il lemma di Jordan ci consente di mandare a zero l'integrale sulla semi circonferenza, ottenendo il risultato finale.

Osserviamo che un risultato analogo vale anche nel caso in cui $k = \pm i\beta$ con $\beta \in \mathbf{R}^+$, chiudendo il cammino di integrazione con una semicirconferenza rispettivamente nel semipiano³ destro ($\text{Re}(z) \geq 0$) o sinistro ($\text{Re}(z) \leq$

3: Nel caso $k = i\beta$ infatti $e^{ikz} = e^{-\beta z} = e^{-\beta(x+iy)} = e^{-\beta x} e^{i\beta y}$, dunque per $\beta > 0$ è necessario che $x \geq 0$ per far sì che l'esponenziale reale non esploda. Considerazioni analoghe valgono per $k = -i\beta$.

0).

Esempio 5.2.1 Calcolare con il metodo dei residui il seguente integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx .$$

Possiamo trasformare il precedente come integrale di Fourier, sfruttando la formula di Eulero:

$$I = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Re}(I_1) ,$$

ed usiamo il teorema (5.2.1) considerando un cammino chiuso Γ che gira nel semipiano immaginario superiore. La funzione $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ presenta due singolarità in $z^{(1)} = i$ e $z^2 = -i$, ma solo la prima cade nel cammino scelto. Avremo dunque

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz \right] \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}[e^{iz} f(z), z^{(1)}] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left[(z - i) \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \right] = \frac{\pi}{e} . \end{aligned}$$

Per valutare l'integrale sulla circonferenza vediamo che lungo il cammino

$$\left| \frac{1}{z^2 + 1} \right| = \left| \frac{1}{R^2 e^{2i\theta} + 1} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1}$$

ossia la funzione $f(z)$ converge uniformemente a 0 per $R \rightarrow \infty$, e dunque soddisfa il lemma di Jordan tale che:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 0 .$$

Collegando tutti i pezzi otteniamo il risultato:

$$I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \oint_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \frac{\pi}{e} ,$$

e infine $I = \operatorname{Re}(I_1) = \pi/e$.

Esempio 5.2.2 Calcolare il valore dell'integrale

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx \quad k \in \mathbf{R} ,$$

con $a > 0$ e $b > 0$. Possiamo usare il teorema dei residui come fatto in precedenza. Prolunghiamo la funzione nel piano complesso, e calcoliamo l'integrale scegliendo un cammino chiuso γ che passi sull'asse reale, e giri nel semipiano immaginario positivo o negativo a seconda che $k > 0$ o $k < 0$ su una semi circonferenza C_R . Esaminiamo i punti singolari della funzione dati da $z_{\pm}^{(1)} = \pm ia$ e $z_{\pm}^{(2)} = \pm ib$, tutti poli semplici. Nel caso $k > 0$ gli unici due punti che cadono nel cammino

chiuso sono dati da $z_+^{(1)}$ e $z_+^{(2)}$ tali che:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), z_+^{(1)}] &= \lim_{z \rightarrow ia} \left[\frac{(z - ia)e^{ikx}}{(z - ia)(z + ia)(z - ib)(z + ib)} \right] \\ &= \frac{e^{-ka}}{(2ia)(ia - ib)(ia + ib)} = \frac{e^{-ka}}{(2a)(b^2 - a^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), z_+^{(2)}] &= \lim_{z \rightarrow ib} \left[\frac{(z - ib)e^{ikx}}{(z - ia)(z + ia)(z - ib)(z + ib)} \right] \\ &= \frac{e^{-kb}}{(2ib)(ib - ia)(ib + ia)} = -\frac{e^{-kb}}{(2b)(b^2 - a^2)}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} dz = \frac{\pi}{b^2 - a^2} \left[\frac{e^{-ka}}{a} - \frac{e^{-kb}}{b} \right].$$

Allo stesso modo per $k < 0$, consideriamo solo le radici con il segno meno, ossia:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), z_-^{(1)}] &= \lim_{z \rightarrow -ia} \left[\frac{(z + ia)e^{ikz}}{(z - ia)(z + ia)(z - ib)(z + ib)} \right] \\ &= \frac{e^{-|k|a}}{(-2ia)(-ia - ib)(-ia + ib)} = -\frac{e^{-ka}}{(2a)(b^2 - a^2)}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), z_-^{(2)}] &= \lim_{z \rightarrow -ib} \left[\frac{(z + ib)e^{ikz}}{(z - ia)(z + ia)(z - ib)(z + ib)} \right] \\ &= \frac{e^{-|k|b}}{(-2ib)(-ib - ia)(-ib + ia)} = \frac{e^{-|k|b}}{(2b)(b^2 - a^2)}. \end{aligned}$$

Sommando i due contributi e tenendo conto che quando chiudiamo il cammino nel piano inferiore ci muoviamo in senso orario:

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} dz = -\frac{\pi}{b^2 - a^2} \left[-\frac{e^{-|k|a}}{a} + \frac{e^{-|k|b}}{b} \right].$$

Ci rimane da capire il comportamento della funzione sugli archi grandi. Vediamo però che in entrambi i casi

$$|f(z)| \leq \frac{1}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

ossia la funzione soddisfa il lemma di Jordan, mandando a zero l'integrale sulle semi circonferenze nel limite $R \rightarrow \infty$. In conclusione, per k sia positivi che negativi:

$$I(k) = \frac{\pi}{b^2 - a^2} \left[\frac{e^{-|k|a}}{a} - \frac{e^{-|k|b}}{b} \right].$$

Esempio 5.2.3 Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{x^2 + 1} dx .$$

Andiamo a scrivere il precedente come

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2\pi x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} - \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x}}{x^2 + 1} dx ,$$

e consideriamone il prolungamento nel piano complesso, che presenta due singolarità in $z_{\pm} = \pm i$. Per calcolare entrambi gli integrali consideriamo un cammino chiuso γ composto dal segmento $[-R, R]$ e da una semi circonferenza passante nel semipiano immaginario positivo. Per il primo termine:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 1}, z_+ \right] = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi .$$

D'altro canto sulla circonferenza

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{1}{z^2 + 1} \right| |dz| \leq \frac{2\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 . \quad (5.24)$$

Allo stesso modo per il secondo integrale

$$\int_{\gamma} \frac{e^{2\pi i z} dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{2\pi i z}}{z^2 + 1}, z_+ \right] = 2\pi i \frac{e^{-2\pi}}{2i} = \pi e^{-2\pi} .$$

Anche in questo caso l'integrale sul semicerchio va a zero quando il raggio cresce all'infinito dato che $\frac{1}{z^2+1}$ converge uniformemente a zero in questo limite. Avremo in totale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{x^2 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin^2 \pi z}{z^2 + 1} dz = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-2\pi}) .$$

5.3 Integrali di funzioni polidrome

Andiamo ad affrontare in questa sezione il caso in cui la funzione integranda sia polidroma. La nostra strategia di base sarà qui quella di scegliere dei cammini si muovano intorno ai punti di diramazione in modo *adeguato*, ossia tali che la funzione sia definita in modo univoco, isolando un solo ramo.

Di seguito andremo a considerare alcuni prototipi di funzioni che coinvolgeranno la funzione radice e il logaritmo, ma la procedura è del tutto generale.

Integrali del tipo $\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x) dx$ con $\alpha \in \mathbf{R}$

Supponiamo che la $f(x)$ sia definita sulla parte positiva dell'asse reale, e che il suo prolungamento analitico, $f(z)$, sia una funzione univoca e analitica, eccetto un numero finito di punti singolari isolati (z_1, \dots, z_n) , non giacenti sull'asse reale positivo. Supponiamo inoltre che $z^{\alpha+1} f(z)$



Figure 5.3: Schermata iniziale del videogame Pacman.

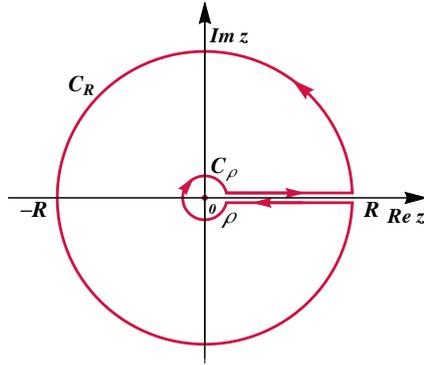


Figure 5.4: Contorno Pacman su cui integriamo la funzione (5.25).

converga uniformemente a zero sia ⁴ per $|z| \rightarrow 0$ che per $|z| \rightarrow \infty$. Allora, dato il dominio racchiuso dal cammino Pacman* mostrato in Fig. (5.4), con un taglio sull'asse reale \mathbf{R}^+ , la funzione

$$z^\alpha f(z) \quad 0 < \arg(z) < 2\pi ,$$

definita in tale dominio rappresenta il prolungamento nel piano complesso di quella di partenza $x^\alpha f(x)$, coincide con essa sul bordo del taglio $\arg(z) \rightarrow 0$, e' univoca, e i suoi punti singolari coincidono con quelli di $f(z)$.

Il cammino Pacman e' costituito dall'unione dei due segmenti $[\rho, R]$ attorno all'asse reale, e dalle circonferenze $|z| = R$ e $|z| = \rho$. L'idea di fondo rimane la stessa di quanto visto nelle sezioni precedenti: integrare una funzione di prova su un cammino chiuso in modo da poter sfruttare il teorema dei residui, e nel limite in cui le componenti del cammino si estendano all'infinito (e in questo caso anche a zero) riottenere l'integrale della funzione di partenza sull'asse reale. Vediamo questa procedura in modo esplicito:

$$\int_{\text{Pacman}} z^\alpha f(z) dz = \int_{C_R} z^\alpha f(z) dz + \int_{C_\rho} z^\alpha f(z) dz + \int_\rho^R z^\alpha f(z) dz + \int_R^\rho z^\alpha f(z) dz , \quad (5.25)$$

con l'idea di considerare alla fine il limite per $R \rightarrow \infty$ e $\rho \rightarrow 0$. Andiamo ad analizzare il valore degli integrali sui singoli tratti del cammino. Sulla circonferenza grande, poiche' per ipotesi in un intorno di $z = \infty$, $|f(z)| < \frac{M}{|z|}$:

$$\left| \int_{C_R} z^\alpha f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |z^\alpha f(z)| |dz| < \frac{MR^\alpha}{R^{\beta+1}} 2\pi R = 2\pi MR^{\alpha-\beta} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 . \quad (5.26)$$

Allo stesso modo sulla circonferenza di raggio ρ , dato che $|f(z)| < M_1$:

$$\left| \int_{C_\rho} z^\alpha f(z) dz \right| \leq M_1 \rho^{\alpha-\gamma-1} 2\pi \rho = 2\pi M_1 \rho^{\alpha-\gamma} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 . \quad (5.27)$$

* Uscito nel 1980, pacman e' un videogioco tipo-labirinto, con un successo mondiale durato decenni. E' ad oggi considerato uno dei videogichi piu' influenti della storia.

4: In pratica $f(z) \sim \frac{M}{z^{1+\beta}}$ con $\beta - \alpha > 0$ per $z \rightarrow \infty$, e $f(z) \sim \frac{M_1}{z^{1+\gamma}}$ con $\gamma - \alpha < 0$ per $z \rightarrow 0$, con M e M_1 costanti.

Sul bordo superiore del contorno, $\arg(z) \rightarrow 0$ l'integrale coincide con quello di partenza sull'asse reale. Su quello inferiore invece, per $z \rightarrow xe^{2\pi i}$:

$$\int_R^\rho z^\alpha f(z) dz = - \int_\rho^R x^\alpha e^{2\pi i \alpha} f(x) dx \quad (5.28)$$

Risostituendo tutti i contributi nell'equazione (5.25), tenendo conto delle (5.26) - (5.27), e usando il teorema dei residui si ha:

$$2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[z^\alpha f(z), z_j] = [1 - e^{2\pi i \alpha}] \int_\rho^R x^\alpha f(x) dx, \quad (5.29)$$

ed infine passando al limite $R \rightarrow \infty$ e $\rho \rightarrow 0$ si ha infine il risultato cercato:

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{k=1}^n \text{Res}[z^\alpha f(z), z_j]. \quad (5.30)$$

Esempio 5.3.1 Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2 + b^2} dx \quad b > 0 \quad e \quad |\alpha| < 1.$$

Integriamo il prolungamento nel piano complesso dell'integrando lungo il cammino Pacman. Possiamo utilizzare la relazione (5.30), e verifichiamo solo che gli integrali sulle circonferenza vanno a zero (ossia che la $f(z)$ soddisfa le proprietà di convergenza). Avremo infatti:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{z^\alpha}{z^2 + b^2} dz \right| &\leq \int_{C_R} \left| \frac{z^\alpha}{z^2 + b^2} \right| |dz| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{\alpha+1}}{R^2 - b^2} d\theta \\ &= 2\pi \frac{R^{\alpha+1}}{R^2 - b^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\rho} \frac{z^\alpha}{z^2 + b^2} dz \right| &\leq \int_{C_\rho} \left| \frac{z^\alpha}{z^2 + b^2} \right| |dz| \leq \int_{2\pi}^0 \frac{\rho^{\alpha+1}}{b^2 - \rho^2} d\theta \\ &= 2\pi \frac{\rho^{\alpha+1}}{\rho^2 - b^2} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Dunque sfruttando il teorema dei residui

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z^\alpha}{z^2 + b^2} dz = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{j=+,-} \text{Res} \left[\frac{z^\alpha}{z^2 + b^2}, z_j \right],$$

dove $z_\pm = \pm ib$ sono le due singolarità isolate della funzione. Andiamo a calcolarci i residui:

$$\text{Res} \left[\frac{z^\alpha}{z^2 + b^2}, z_+ \right] = \frac{(ib)^\alpha}{2ib} = \frac{b^\alpha e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}}{2ib},$$

e

$$\text{Res} \left[\frac{z^\alpha}{z^2 + b^2}, z_- \right] = \frac{(-ib)^\alpha}{-2ib} = -\frac{b^\alpha e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}}{2ib},$$

e sommando i due contributi

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z^\alpha}{z^2 + b^2} dz = \frac{\pi}{1 - e^{2\pi i \alpha}} b^{\alpha-1} (e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{3\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2} b^{\alpha-1} \frac{1}{\cos \pi \alpha / 2},$$

che nel limite $R \rightarrow \infty$ e $\rho \rightarrow 0$ coincide con l'integrale di partenza sull'asse reale.

Esempio 5.3.2 Calcolare utilizzando il teorema dei residui il valore dell'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad 0 < \alpha < 1.$$

La funzione soddisfa tutte le ipotesi discusse in precedenza, infatti

$$z \cdot \frac{z^{\alpha-1}}{z+1} \xrightarrow{\text{uniformemente}} 0 \quad \text{per } |z| \rightarrow \infty, 0.$$

Possiamo dunque passare al piano complesso e utilizzare il teorema dei residui su un cammino chiuso tipo Pacman come in Fig. 5.4. Nel caso specifico si ha un unico punto singolare in $z = -1$, che e' anche un polo semplice, e dunque e' immediato:

$$\text{Res} \left[\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}, z = -1 \right] = (-1)^{\alpha-1}.$$

Sfruttando la relazione (5.30) si ha

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(\alpha-1)}} (-1)^{\alpha-1} = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(\alpha-1)}} e^{i\pi(\alpha-1)} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}.$$

Integrali del tipo $\int_0^\infty f(x) \log^n(x) dx$

In questa sezione discuteremo il calcolo di integrali del tipo

$$I_n = \int_0^\infty f(x) \log^n(x) dx,$$

con una potenza generica del logaritmo. Partiamo dal caso piu' semplice con $n = 1$, per poi generalizzare il ragionamento, e facciamo ricorso ancora una volta al contorno Pacman (5.4). Tuttavia in questo caso consideriamo come funzione di prova nel piano complesso $\log(z)^2 f(z)$, ossia:

$$\int_{\mathcal{C}} \log^2(z) f(z) dz \quad 0 < \arg(z) < 2\pi, \quad (5.31)$$

Vediamo i vari contributi al cammino totale. Supponiamo inoltre che, per motivi di convergenza⁵, $z \log(z) f(z)$ vada a zero uniformemente per $|z| \rightarrow \infty$ e $|z| \rightarrow 0$. Sul bordo inferiore del taglio:

$$\begin{aligned} \int_R^\rho \log^2(z) f(z) dz &= \int_R^\rho [\log(x) + 2i\pi]^2 f(x) dx \\ &= \int_R^\rho [\log^2(x) - 4\pi^2 + 4i\pi \log(x)] f(x) dx. \end{aligned} \quad (5.32)$$

5: $f(x)$ deve andare a zero piu' rapidamente di $1/z$ per $z \rightarrow \infty$, e meno rapidamente di $1/z$ per $z \rightarrow 0$.

Sommando questo contributo a quello valutato sul taglio superiore

$$\int_{\rho}^R \log^2(z)f(z)dz + \int_R^{\rho} \log^2(z)f(z)dz = \int_{\rho}^R [4\pi^2 - 4i\pi \log(x)]f(x)dx. \quad (5.33)$$

Sulla circonferenza grande§

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \log^2(z)f(z)dz \right| &\leq \int_{C_R} |\log^2(z)f(z)| |dz| \leq |\log(R) + 2\pi i|^2 \frac{M}{R^{1+\delta}} R \\ &\leq \frac{M}{R^{\delta}} [\log^2(R) + 4\pi + 4\pi \log(R)] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

Con M costante e $\delta > 0$. Allo stesso modo sulla circonferenza piccola

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{\rho}} \log^2(z)f(z)dz \right| &\leq \int_{C_{\rho}} |\log^2(z)f(z)| |dz| \leq |\log(\rho) + 2\pi i|^2 \frac{M_2}{\rho^{\sigma}} \rho \\ &\leq M_2 \rho^{1-\sigma} [\log^2(\rho) + 4\pi + 4\pi \log(\rho)] \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

con $\sigma < 1$ e M_2 costante. Sostituendo nell'equazione (5.31) e passando al limite $R \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$ si ha

$$\int_0^{\infty} \log(x)f(x)dx = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}[\log^2(z)f(z), z_j] - i\pi \int_0^{\infty} f(x)dx. \quad (5.34)$$

Ci rimane da calcolare l'ultimo integrale a destra, ma per farlo possiamo usare la stessa strategia usata fino ad ora, ma considerando

$$\int_{\mathcal{C}} \log(z)f(z)dz. \quad (5.35)$$

Svolgendo di nuovo tutte i passaggi troviamo

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = -\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}[\log(z)f(z), z_j], \quad (5.36)$$

e sostituendo nella (5.31) infine

$$\int_0^{\infty} \log(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}[i\pi \log(z)f(z) - \frac{1}{2} \log^2(z)f(z), z_j]. \quad (5.37)$$

La generalizzazione al caso in cui nell'integrale generico (5) si abbia $n > 1$, procede in modo del tutto analogo, considerando l'integrazione nel piano complesso di una funzione con il logaritmo elevato alla potenza $(n+1)$ -esima. Notiamo infine che se $f(x)$ e' reale pura dalla (5.34) ricaviamo immediatamente

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \operatorname{Im} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}[\log^2(z)f(z), z_j] \right\}, \quad (5.38)$$

e

$$\int_0^{\infty} \log(z) f(x) dx = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}[\log^2(z) f(z), z_j] \right\}. \quad (5.39)$$

Esempio 5.3.3 Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0,$$

Passiamo come al solito piano complesso. La funzione di partenza ammette due poli semplici in $z_{\pm} = \pm ia$. L'idea è dunque di considerare il cammino Pacman e di integrare la funzione di prova $\frac{\log(z)}{z^2 + a^2}$. Quest'ultima soddisfa le proprietà di convergenza necessarie per far andare a zero i contributi sui cerchi grandi e piccoli infatti

$$\left| \int_{C_R} \frac{\log(z)^2}{z^2 + a^2} dz \right| \leq \frac{|\log(R) + 2i\pi|^2}{R^2 - a^2} 2\pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (5.40)$$

e lo stesso vale sul cerchio piccolo di raggio ρ per $\rho \rightarrow 0$. Possiamo dunque andare ad utilizzare la formula (5.37). Andiamo dunque a calcolare i residui corrispondenti. In $z = ia$, data $f(z) = i\pi \log(z) f(z) - \frac{1}{2} \log^2(z) f(z)$ si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} [f(z), ia] &= -\frac{1}{2} \frac{\log^2(ia)}{2ia} + i\pi \frac{\log(ia)}{2ia} \\ &= \frac{1}{2ia} \left[i\pi \log(a) - \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\log^2(a) + i\pi \log(a) - \frac{\pi^2}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2ia} \left[\frac{i\pi}{2} \log(a) - \frac{3\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \log^2(a) \right], \end{aligned}$$

e allo stesso modo

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} [f(z), -ia] &= -\frac{1}{2} \frac{\log^2(-ia)}{-2ia} + i\pi \frac{\log(-ia)}{-2ia} \\ &= -\frac{1}{2ia} \left[i\pi \log(a) - \frac{3\pi^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\log^2(a) + 3i\pi \log(a) - \frac{9\pi^2}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2ia} \left[\frac{i\pi}{2} \log(a) + \frac{3\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \log^2(a) \right]. \end{aligned}$$

Il valore di I sarà dato dalla somma di questi due contributi, ossia:

$$I = \frac{\pi}{2a} \log(a).$$

Le vie di $\int_0^{\infty} f(x) \log(x) dx$ sono infinite

Osserviamo come in alcune situazioni sia possibile integrare facilmente la funzione

$$\int_0^{\infty} f(x) \log(x) dx$$

utilizzando un cammino diverso da quello Pacman. Nel caso in cui $f(x)$ sia pari, possiamo ad esempio considerare il percorso chiuso γ

mostrato in Figura 5.5, composto dai due segmenti $[-R, -\rho]$ e $[\rho, R]$, dalle semicirconferenze $|z| = R$ e $|z| = \rho$, con la funzione

$$\log(z)f(z) \quad \pi < \arg(z) < 0,$$

che rappresenta un ramo analitico della della funzione totale⁶ e coincide con $\log(x)f(x)$ per $\arg(z) \rightarrow 0$ ossia sulla parte positiva dell'asse reale. Sfruttando il teorema dei residui:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) \log(z) dz &= \int_{-\rho}^{-R} \log(z) f(z) dz + \int_{\rho}^R \log(z) f(z) dz \\ &+ \int_{C_R} \log(z) f(z) dz + \int_{C_\rho} \log(z) f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res} [\log(z) f(z), z_j], \end{aligned} \quad (5.41)$$

dove z_j sono le n singolarita' della funzione contenute nel cammino. Andiamo a valutare il contributo sull'asse reale negativo, ossia per $\arg(z) \rightarrow \pi$:

$$\begin{aligned} \int_{-\rho}^{-R} \log(z) f(z) dz &= - \int_{-\rho}^{-R} \log(xe^{i\pi}) f(x) dx \\ &= \int_{\rho}^R [\log(x) + i\pi] f(x) dx. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Per quanto riguarda gli integrali sugli archi

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \log(z) f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi \frac{M}{R^{1+\delta}} R |\log R + i \arg(z)| d\theta \\ &\leq \frac{\pi M}{R^\delta} \sqrt{\log^2(R) + \pi^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

e allo stesso modo sul semicerchio piccolo

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\rho} \log(z) f(z) dz \right| &\leq \int_\pi^0 M_1 \rho |\log \rho + i \arg(z)| d\theta \\ &\leq (-1)\pi M_1 \rho \sqrt{\log^2(\rho) + \pi^2} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

con M, M_1 costanti e $\delta > 0$. Mettendo insieme i contributi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) \log(z) dz &= \int_{-\rho}^{-R} \log(z) f(z) dz + \int_{\rho}^R \log(z) f(z) dz \\ &= 2 \int_{\rho}^R f(x) \log(x) dx + i\pi \int_{\rho}^R f(x) dx, \end{aligned} \quad (5.45)$$

e passando al limite $R \rightarrow \infty$ e $\rho \rightarrow 0$:

$$\int_0^\infty f(x) \log(x) dx = \pi i \sum_{j=1}^n \text{Res} [\log(z) f(z), z_j] - \frac{i\pi}{2} \int_0^\infty f(x) dx. \quad (5.46)$$

D'altro canto se la $f(x)$ e' una funzione pari, possiamo sfruttare quanto

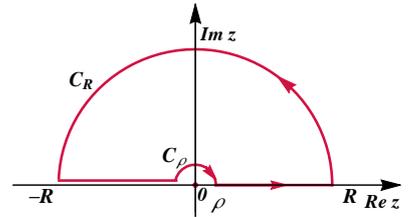


Figure 5.5: Cammino di integrazione per la funzione $f(z) \log(z)$.

6: Assumiamo come al solito che $z f(z) \log(z)$ sia uniformemente convergente a zero per $|z| \rightarrow \infty$ e $|z| \rightarrow 0$.

visto per le funzioni prolungabili nel semipiano superiore, e in particolare l'equazione (5.21). In questo caso

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) \log(x) dx &= \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} [\log(z) f(z), z_j] - \frac{i\pi}{2} \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} [f(z), z_j] \\ &= \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} \left[f(z) \left(\log(z) - \frac{i\pi}{2} \right), z_j \right]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Esempio 5.3.4 Risolvere l'integrale dell'esercizio 5.3.3 usando la relazione (5.47).

La funzione $\frac{1}{x^2+a^2}$ è pari e soddisfa tutte le condizioni di convergenza richieste. Notiamo che solo il polo in $z = ia$ cade nel nuovo cammino scelto. Avremo dunque che

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{x^2+a^2} dx = \pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2+a^2} \left(\log(z) - \frac{i\pi}{2} \right), z = ia \right],$$

in cui per i residui:

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\log(z)}{z^2+a^2}, z = ia \right] = \frac{1}{2ia} \left[\log(a) + i\frac{\pi}{2} \right],$$

e

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2+a^2}, z = ia \right] = \frac{1}{2ia}.$$

Sommando tutto

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi i}{2ia} \left[\log(a) + i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2a} \log(a),$$

che coincide esattamente con il risultato trovato in precedenza.

Integrali del tipo $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{(1-x)^\alpha} f(x) dx$

Andiamo a considerare integrali del tipo

$$I = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{(1-x)^\alpha} f(x) dx, \quad (5.48)$$

con $0 < \alpha < 1$, e $f(x)$ definita sull'asse reale tra 0 e 1, e tale che possa essere prolungata analiticamente nel piano complesso. Supponiamo che il prolungamento sia una funzione univoca e analitica a meno di un numero finito di singolarità isolate $z_{j=1, \dots, N}$, le quali non giacciono sul segmento $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$, e che $z = \infty$ sia una singolarità eliminabile. Supponiamo inoltre che $(z - z_0)g(z)$ vada a zero uniformemente per $z \rightarrow z_0$.

Notiamo infine che la funzione nel piano complesso $g(z) = z^{\alpha-1}(1-z)^\alpha f(z)$ ha due punti di diramazione in $z = 0$ e $z = 1$. Per integrarla consideriamo un cammino γ come quello mostrato in Figura (5.6), composto dalla circonferenza di raggio R C_R che contiene tutti i punti singolari della funzione, e dal taglio tra i due punti di diramazione, costituito a

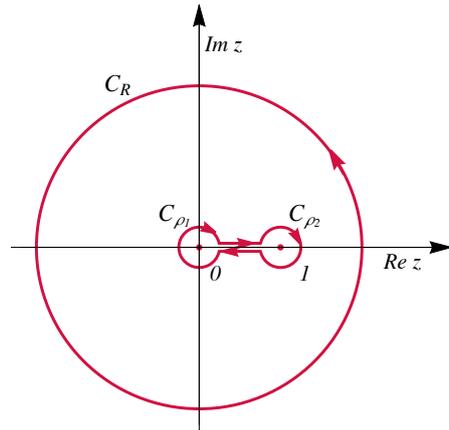


Figure 5.6: Cammino a *dumbell* per il calcolo dell'integrale (5.48).

sua volta dalle circonferenze di raggio infinitesimo $|z - 1| = \rho$ e $|z| = \rho$, e dai due bordi sopra e sotto l'asse reale.

Dal teorema dei residui

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g(z) dz &= \int_{\rho}^{1-\rho} g(z) dz + \int_{C_{\rho_1}} g(z) dz + \int_{C_{\rho_2}} g(z) dz \\ &+ \int_{C_R} g(z) dz + \int_{1-\rho}^{\rho} g(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res} [z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha} f(z), z_j] , \end{aligned} \quad (5.49)$$

Andiamo a valutare il contributo sui vari cammini, partendo dal cerchio grande. Per le ipotesi fatte, il punto $z = \infty$ e' una singolarita' eliminabile della funzione, dunque la $f(z)$ puo' essere scritta come:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \dots \quad \text{con} \quad c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) . \quad (5.50)$$

Inoltre, dato il rapporto:

$$\varphi(z) = \frac{g(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} \left(\frac{z}{1-z} \right)^{\alpha} , \quad (5.51)$$

$z = \infty$ e' un punto regolare di $\varphi(z)$, ed in un suo intorno, espandendo in serie,

$$\varphi(z) \simeq \frac{(-1)^{\alpha}}{z} + \frac{(-1)^{\alpha} \alpha}{z^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{z^3} \right) = \frac{e^{i\pi\alpha}}{z} + \frac{\psi(z)}{z^2} , \quad (5.52)$$

con $\psi(z)$ funzione analitica nel punto all'infinito. Avremo dunque per la funzione $g(z)$ di partenza:

$$g(z) = \varphi(z)f(z) = c_0 \frac{e^{i\pi\alpha}}{z} + \frac{\psi_1(z)}{z^2} , \quad (5.53)$$

con $\psi_1(z)$ analitica e limitata intorno a $z = \infty$. Possiamo calcolare il residuo all'infinito della precedente

$$\text{Res}[g(z), \infty] = -c_0 e^{i\pi\alpha} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} g(z) dz , \quad (5.54)$$

da cui ricaviamo il valore dell'integrale sulla circonferenza grande⁷. Dalle ipotesi iniziali gli integrali lungo le due circonferenze piccole $C_{\rho_{1,2}}$ vanno a zero nel limite $\rho \rightarrow 0$. Ci rimane il calcolo esplicito sui due segmenti del taglio. Quando ci muoviamo attorno a $z = 1$ in senso orario sul labbro superiore la funzione coincidera' con quella sull'asse reale ($\arg(z) \rightarrow 0$) e dunque

$$\int_{\rho}^{1-\rho} \frac{z^{\alpha-1}}{(1-z)^{\alpha}} f(z) dz \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} I, \tag{5.55}$$

mentre sul bordo inferiore l'argomento di $1 - z$ cambiera' di -2π , ossia per $\arg(z) \rightarrow -2\pi$:

$$\begin{aligned} \int_{1-\rho}^{\rho} \frac{z^{\alpha-1}}{(1-z)^{\alpha}} f(z) dz &= \int_{1-\rho}^{\rho} \frac{z^{\alpha-1} f(z)}{(1-z)^{\alpha} e^{-2i\pi\alpha}} dz \\ &= -e^{2i\pi\alpha} \int_{\rho}^{1-\rho} \frac{z^{\alpha-1} f(z)}{(1-z)^{\alpha}} dz \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} -e^{2i\pi\alpha} I. \end{aligned} \tag{5.56}$$

Sommando tutti i vari pezzi dell'integrale (5.49) e passando al limite per $\rho \rightarrow 0$:

$$(1 - e^{2\pi i\alpha})I + 2\pi i e^{i\pi\alpha} c_0 = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}[z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha} f(z), z_j]. \tag{5.57}$$

da cui la formula generale

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{(1-x)^{\alpha}} f(x) dx = \frac{\pi c_0}{\sin \pi\alpha} + \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \sum_{j=1}^N \text{Res} \left[\frac{z^{\alpha-1}}{(1-z)^{\alpha}} f(z), z_j \right]. \tag{5.58}$$

7: Il segno meno davanti all'integrale e' legato al fatto che nella definizione di residuo all'infinito data nella (4.23) il cammino e' percorso in senso orario, mentre nel nostro caso in senso antiorario.

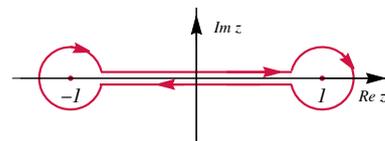


Figure 5.7: Taglio relativo al cammino a dumbbell usato per l'esercizio 5.3.5.

Esempio 5.3.5 Calcolare, usando il teorema dei residui il valore dell'integrale:

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

L'integrale proposto ha una forma funzionale leggermente diversa da quello visto nella (5.48), e tuttavia puo' essere trattato nello stesso identico modo, considerando il prolungamento analitico $\sqrt{z^2 - 1}$ e integrandolo lungo il cammino dumbbell, con il taglio mostrato in Figura 5.7. Infatti la $f(z) = \sqrt{(z-1)(z+1)}$ ha due punti di diramazione in $z_{\pm} = \pm 1$. Scomponendo il percorso come nel caso della (5.49) avremo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sqrt{z^2 - 1} dz &= \int_{C_R} \sqrt{z^2 - 1} dz + \int_{C_{-1,1}} \sqrt{z^2 - 1} dz + \int_{-1+\rho}^{1-\rho} \sqrt{z^2 - 1} dz \\ &\quad + \int_{1-\rho}^{-1+\rho} \sqrt{z^2 - 1} dz = 0, \end{aligned}$$

in cui la somma sui residui e' nulla (non ci sono singularita' nel cammino) e abbiamo indicato con $C_{-1,1}$ le circonferenze centrate nei punti di diramazione e di raggio ρ . L'integrale su queste ultime va a

zero per $\rho \rightarrow 0$, infatti

$$\left| \int_{C_1} \sqrt{z^2 - 1} dz \right| \leq \int_{-2\pi}^0 \sqrt{\rho(2 + \rho)} \rho d\theta \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0,$$

e lo stesso per C_{-1} . Per il calcolo sulla circonferenza grande possiamo usare il residuo all'infinito, ossia

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \sqrt{z^2 - 1} dz &= -2\pi i \operatorname{Res}[\sqrt{z^2 - 1}, \infty] = \\ &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{w^2} \sqrt{\frac{1}{w^2} - 1}, 0 \right] = -\pi i, \end{aligned}$$

dato che espandendo attorno a $w = 0$ la funzione va come $\sim \frac{1}{w^3} - \frac{1}{2w} - \frac{w}{8} + \dots$. Infine, mentre sul bordo superiore del taglio l'integrale coincide con quello sull'asse reale, su quello inferiore

$$\int_{1-\rho}^{-1+\rho} \sqrt{z^2 - 1} dz = -e^{-\pi i} \int_{-1+\rho}^{1-\rho} \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

Dunque, sommando tutti i termini avremo

$$2 \int_{-1+\rho}^{1-\rho} \sqrt{x^2 - 1} dx - \pi i = 0,$$

e passando al limite $\rho \rightarrow 0$:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{\pi i}{2}.$$

Notiamo infine che potremmo applicare quanto trovato al calcolo dell'integrale di $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ottenendo

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2},$$

che corrisponde all'area del semicerchio di raggio unitario.

Integrali del tipo $\int_0^\infty x^\alpha \log(x) f(x) dx$

Nel caso in cui si abbia a che fare con integrali di funzioni del tipo $x^\alpha \log(x) f(x)$, come prodotto di una radice per un logaritmo, si può eseguire il calcolo senza considerare potenze superiori del $\log x$ come visto per la (5.31), ma integrando sul contorno pacman il prolungamento analitico $g(z) = z^\alpha \log(z) f(z)$. Vediamo la soluzione generale.

Assumiamo per semplicità che la $f(z)$ sia univoca e che $z g(z)$ vada a zero uniformemente per $|z| \rightarrow \infty$ e $|z| \rightarrow 0$, in modo tale da poter eliminare il contributo sulla circonferenza grande e piccola. In questo caso la somma dei vari pezzi del pacman si riduce al calcolo degli integrali sul labbro superiore e inferiore del taglio:

$$\int_{\mathcal{C}} g(z) dz = \int_\rho^R g(z) dz + \int_R^\rho g(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}[g(z), z_j], \quad (5.59)$$

in cui la somma sui residui e' fatta sulle n eventuali singolarita' isolate di $f(z)$. Sul bordo superiore del taglio l'integrale coincide con la sua controparte in \mathbf{R} , mentre su quello inferiore per $\arg(z) \rightarrow 2\pi$:

$$\int_R^\rho g(z)dz = - \int_\rho^R x^\alpha f(x)[\log x + 2\pi i]e^{2\pi i\alpha} dx . \quad (5.60)$$

Sommando i due termini si ha:

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}[g(z), z_j] &= (1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_\rho^R x^\alpha f(x) \log x dx \\ &\quad - 2\pi i e^{2\pi i\alpha} \int_\rho^R x^\alpha f(x) dx , \end{aligned} \quad (5.61)$$

e passando ai limiti $\rho \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\alpha f(x) \log x dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}[g(z), z_j] \\ &\quad + 2\pi i \frac{e^{2\pi i\alpha}}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \int_0^\infty x^\alpha f(x) dx . \end{aligned} \quad (5.62)$$

Abbiamo dunque *semplificato* il nostro integrale di partenza, riducendolo al calcolo dei residui e di un secondo integrale solo sulla radice.

Esempio 5.3.6 Calcolare con il metodo dei residui l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} x}{\cosh x} dx .$$

Possiamo utilizzare quanto appena visto nel paragrafo precedente notando che, tramite la sostituzione $x = \log y$, l'integrale di partenza si riduce a

$$I = 2 \int_0^\infty \frac{y^{ik} \log y}{y^2 + 1} dy .$$

che e' proprio della forma data nella (5.62). Il calcolo dei residui risulta immediato, dato che l'integranda ha due poli semplici in $y = (e^{\frac{i\pi}{2}}, e^{\frac{3i\pi}{2}})$ e dunque

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res} \left[2 \frac{y^{ik} \log y}{y^2 + 1}, y = \pm i \right] &= 4\pi i \left[\frac{e^{-\frac{k\pi}{2}} \log(e^{\frac{i\pi}{2}})}{2i} - \frac{e^{-\frac{3k\pi}{2}} \log(e^{\frac{3i\pi}{2}})}{2i} \right] \\ &= \pi^2 i \left(e^{-\frac{k\pi}{2}} - 3e^{-\frac{3k\pi}{2}} \right) . \end{aligned}$$

Seguendo la (5.62) ci rimane da calcolare l'integrale

$$I_2 = 2 \int_0^\infty \frac{y^{ik}}{y^2 + 1} dy ,$$

che puo' risolto ricorrendo ancora una volta al contorno pacman e considerando il prolungamento analitico nel piano complesso $\frac{z^{ik}}{z^2 + 1}$.

Trascurando il contributo sulle circonferenze grandi e piccole si ha

$$2 \int_{\mathcal{C}} \frac{z^{ik}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left[2 \frac{z^{ik}}{z^2 + 1}, y = \pm i \right] = 2\pi \left(e^{-\frac{k\pi}{2}} - e^{-\frac{3k\pi}{2}} \right)$$

$$= 2 \int_{\rho}^R \frac{z^{ik}}{z^2 + 1} (1 - e^{-2\pi k}) dz, \quad (5.63)$$

e passando ai limiti $\rho \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$:

$$I_2 = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\pi k}} \left(e^{-\frac{k\pi}{2}} - e^{-\frac{3k\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{\cosh \frac{k\pi}{2}}. \quad (5.64)$$

Abbiamo dunque tutti gli ingredienti per il risultato finale

$$I = \frac{\pi^2 i}{1 - e^{-2\pi k}} \left(e^{-\frac{k\pi}{2}} - 3e^{-\frac{3k\pi}{2}} + \frac{2e^{-2\pi k}}{\cosh \frac{k\pi}{2}} \right). \quad (5.65)$$

5.4 Integrali impropri con singolarita' sull'asse reale

Fino ad ora abbiamo considerato solo integrali le cui $f(x)$ non avessero singolarita' sull'asse reale. Tuttavia, possiamo generalizzare ed estendere tutti i ragionamenti fatti nelle sezioni precedenti includendo la possibilita' che cio' accada, e definire il *valore principale di Cauchy* dell'integrale⁸ come

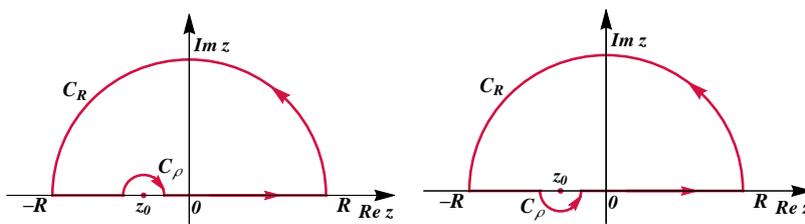
$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \epsilon}^{\infty} f(x) dx \right], \quad (5.66)$$

con x_0 polo della funzione sull'asse reale. Possiamo trattare questo tipo di integrali sfruttando ancora una volta il teorema dei residui, prolungando la $f(x)$ nel piano complesso e scegliendo un cammino Γ deformato che giri attorno al polo, come nel grafico superiore in Figura 5.8.

Il percorso passa *sopra* a x_0 percorrendo una semicirconferenza di raggio infinitesimo ρ . Supponiamo che $z f(z)$ vada a zero uniformemente per $|z| \rightarrow \infty$, e che x_0 sia un polo semplice, tale che

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \phi(z), \quad (5.67)$$

con $\phi(z)$ regolare per $z \rightarrow z_0$. Consideriamo dunque l'integrale sul circuito chiuso totale, con l'idea di fare poi il doppio limite $R \rightarrow \infty$ e



8: Non daremo qui nessuna trattazione formale della (5.66), e assumeremo che l'integrale sia a tutti gli effetti ben definito e convergente.

Figure 5.8: Cammini di integrazione passanti sopra e sotto una singolarita' z_0 sull'asse reale.

$\rho \rightarrow 0$:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{-R}^{x_0-\rho} f(z)dz + \int_{x_0+\rho}^R f(z)dz + \int_{C_\rho} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz. \quad (5.68)$$

Il termine sulla semicirconferenza grande si annulla per le proprietà di convergenza della $f(z)$. Sul tratto attorno al polo invece:

$$\int_{C_\rho} f(z)dz = \int_{\pi}^0 \left[\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \phi(z) \right] i\rho e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^{\pi} [c_{-1} + \phi(z)\rho e^{i\theta}] d\theta \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} -ic_{-1}\pi. \quad (5.69)$$

Passando dunque ai limiti si ottiene:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz \rightarrow \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0}} \left[\int_{-R}^{x_0-\rho} f(z)dz + \int_{x_0+\rho}^R f(z)dz \right] - i\pi c_{-1}. \quad (5.70)$$

La quantità tra parentesi è proprio l'integrale al valor principale definito nell'equazione (5.66), e sfruttando il teorema dei residui:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = i\pi c_{-1} + 2\pi i \sum_{j=1}^n Res[f(z), z_j]. \quad (5.71)$$

con z_j eventuali n poli della funzione contenuti nel cammino di integrazione, diversi da z_0 .

Alcune considerazioni.

1. Notiamo innanzitutto che il contributo dato dal pezzetto valutato lungo la circonferenza piccola corrisponde a meno di un fattore moltiplicativo, con il residuo della funzione attorno al polo in x_0 . Vale infatti il seguente teorema⁹:

Teorema 5.4.1 Se $f(z)$ ha un polo semplice in z_0 , sia C_α un arco di circonferenza descritto dalla curva $\gamma(\alpha) = z_0 + \rho e^{i\theta}$ con $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \alpha$, allora

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\alpha} f(z)dz = \alpha i Res[f(z), z_0]. \quad (5.72)$$

La dimostrazione è immediata. Infatti, per un polo semplice

$$\int_{C_\alpha} f(z)dz = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} \left[\frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \right] \rho i e^{i\theta} d\theta = i \int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} [c_{-1} + c_0 \rho e^{i\theta} + \dots] d\theta \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} i\alpha c_{-1}.$$

2. la procedura appena trovata può essere generalizzata al caso in cui la $f(x)$ abbia un numero $k > 1$ singolarità sull'asse reale, ciascuna delle quali contribuirà all'integrale totale con un fattore $i\pi$ che moltiplica il corrispondente residuo. In questo caso il cammino

9: In realtà non stiamo aggiungendo qui nulla di nuovo a quanto visto quando abbiamo affrontato l'uniforme convergenza e il calcolo degli integrali su archi infinitesimi.

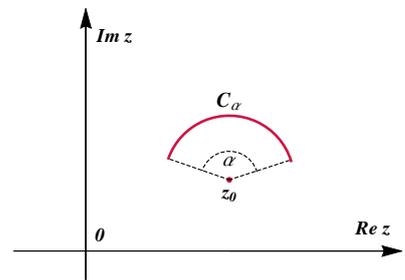


Figure 5.9: Arco di circonferenza attorno ad una singolarità isolata z_0 .

sara' tale che:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{-R}^{x_0-\rho_1} f(z)dz + \int_{x_0+\rho_1}^{x_1-\rho_2} f(z)dz + \\ + \int_{x_1+\rho_2}^{x_2-\rho_3} f(z)dz + \cdots \int_{x_n+\rho_{n+1}}^R f(z)dz + \cdots, \quad (5.73)$$

con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ singolarita' sull'asse reale, e in cui limite finale va considerato per $R \rightarrow \infty$ e tutti i $\rho_i \rightarrow 0$. Inoltre

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = i\pi \sum_{k=1}^m c_{-1}^k + 2\pi i \sum_{j=1}^n Res[f(z), z_j], \quad (5.74)$$

con c_{-1}^k residuo relativo al polo reale k -esimo.

3. Osserviamo che avremmo potuto scegliere un cammino diverso da quello usato, passante al di sotto di z_0 (si veda il pannello inferiore di Figura 5.8). Il risultato finale non cambia, anche se variano i singoli contributi. Sulla circonferenza piccola

$$\int_{C_\rho} f(z)dz = \int_{\pi}^{2\pi} \left[\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \phi(z) \right] i\rho e^{i\theta} d\theta \\ = i \int_{\pi}^{2\pi} [c_{-1} + \phi(z)\rho e^{i\theta}] d\theta \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} i\pi c_{-1}\pi. \quad (5.75)$$

In questo caso tuttavia avremo un contributo extra, dato che la somma sui residui conterra' un termine proveniente da z_0 , questa volta contenuto in Γ :

$$2\pi Res[f(z), z_0] = 2\pi i c_{-1}. \quad (5.76)$$

Nei limiti considerati in precedenza dunque:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0}} \left[\int_{-R}^{x_0-\rho} f(z)dz + \int_{x_0+\rho}^R f(z)dz \right] + i\pi c_{-1} = 2\pi i c_{-1} \\ + 2\pi i \sum_{j=1}^n Res[f(z), z_j],$$

che ci fornisce il risultato gia' trovato in precedenza.

4. Infine, come procedura alternativa per calcolare l'integrale, al posto di deformare il cammino per farlo passare attorno ai poli, avremmo potuto *spostare* questi ultimi di una quantita' infinitesima $i\epsilon$, in modo da rimuoverli dall'asse reale, svolgere i conti e poi fare il limite $\epsilon \rightarrow 0$. In questo caso l'integrale a valore principale sara' dato da:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{x - x_0 \mp i\epsilon} = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{x - x_0} \pm i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)g(x)dx = \\ = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{x - x_0} \pm i\pi g(x_0), \quad (5.77)$$

con $g(x)$ funzione regolare sull'asse reale.

Esempio 5.4.1 Calcolare il valore del seguente integrale a valor principale

$$I = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 - b^2} \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a, b > 0.$$

Osserviamo innanzitutto che la funzione ha due singolarità sull'asse reale corrispondenti a $x_{\pm}^{(0)} = \pm b$. Essa inoltre soddisfa tutte le condizioni richieste per applicare la relazione (5.74). Scegliendo un cammino come quello mostrato in Figura 5.10 e prolungando la funzione integranda nel piano complesso avremo infatti:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{e^{iaz}}{z^2 - b^2} dz &= \int_{-R}^{x_+^{(0)} - \rho_1} \frac{e^{iaz}}{z^2 - b^2} dz + \int_{x_+^{(0)} + \rho_1}^{x_+^{(0)} - \rho_2} \frac{e^{iaz}}{z^2 - b^2} dz \\ &+ \int_{x_+^{(0)} + \rho_2}^R \frac{e^{iaz}}{z^2 - b^2} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2 - b^2} dz \\ &+ \int_{C_{\rho_1}} \frac{e^{iaz}}{z^2 - b^2} dz + \int_{C_{\rho_2}} \frac{e^{iaz}}{z^2 - b^2} dz = 0. \end{aligned}$$

Passando ai limiti $R \rightarrow \infty$, $\rho_{1,2} \rightarrow 0$ i primi tre termini della precedente ci restituiranno l'integrale a valor principale, il quarto andrà a zero, mentre gli ultimi due corrisponderanno ai residui nei poli reali (moltiplicati per $i\pi$) ossia:

$$I = i\pi c_{-1}[x_+^{(0)}] + i\pi c_{-1}[x_-^{(0)}],$$

Ci rimane da calcolare il valore esplicito dei c_{-1} :

$$c_{-1}[x_+^{(0)}] = \lim_{x \rightarrow b} \left[\frac{(x-b)e^{iax}}{(x-b)(x+b)} \right] = \frac{e^{iab}}{2b},$$

e

$$c_{-1}[x_-^{(0)}] = \lim_{x \rightarrow -b} \left[\frac{(x+b)e^{iax}}{(x-b)(x+b)} \right] = -\frac{e^{-iab}}{2b},$$

da cui

$$I = -\frac{\pi}{b} \sin(ab).$$

Come viste in precedenza, possiamo risolvere l'esercizio anche spostando le singolarità dall'asse reale aggiungendo un fattore immaginario puro infinitesimo che manderemo poi a zero. In questo caso:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 - b^2 + i\epsilon} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{(x - \sqrt{b^2 - i\epsilon})(x + \sqrt{b^2 - i\epsilon})} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{[x - b + i\epsilon][x + b - i\epsilon]} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{[x - (b - i\epsilon)][x - (-b + i\epsilon)]} dx. \end{aligned}$$

Le nuove singolarità della funzione sono date da $\tilde{x}_+ = b - i\epsilon$ e da $\tilde{x}_- = -b + i\epsilon$ che si trovano rispettivamente sotto e sopra l'asse reale.

Possiamo calcolare esplicitamente il valore dell'integrale passando nel piano complesso e scegliendo un cammino γ che chiude in $\text{Im}(z) > 0$ con una semicirconfenza. In questo caso l'unica singolarità contenuta

nel percorso e' data da \tilde{x}_- e dunque per il teorema dei residui^a:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{[x - (b - i\epsilon)][x - (-b + i\epsilon)]} dx \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \tilde{z}_-] \\ &= 2\pi i \frac{e^{ia(-b+i\epsilon)}}{-2b + 2i\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\pi i e^{-iab}}{b}. \end{aligned}$$

Per concludere, possiamo utilizzare la relazione (5.77), pero' in questo caso e' necessario tenere conto che i poli sull'asse reale sono due, dunque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 - b^2 + i\epsilon} dx = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 - b^2} dx - i\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \delta(x^2 - b^2),$$

con $\delta(x^2 - b^2) = \frac{1}{2b} [\delta(x + b) + \delta(x - b)]$ per le proprieta' della delta. Sostituendo nella precedente avremo infine che il valore principale dell'integrale sara' dato da:

$$\begin{aligned} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 - b^2} dx &= -i\pi \frac{e^{-iab}}{b} + \frac{i\pi}{2b} [e^{iab} + e^{-iab}] \\ &= -i\pi \frac{e^{-iab}}{b} + i\pi \frac{\cos(ab)}{b} = -\frac{\pi}{b} \sin(ab). \end{aligned}$$

^a L'integrale sulla semicirconferenza va a zero nel limite $R \rightarrow \infty$ per il lemma di Jordan.

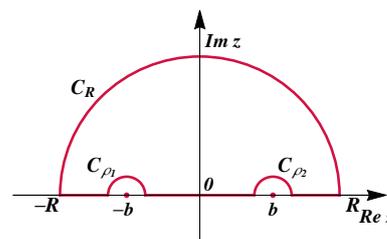


Figure 5.10: Cammino usato per l'integrale a valore principale dell'esercizio (5.4.1).

Esempio 5.4.2 Calcolare i seguenti integrali a valore principale

a) $I_1 = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$, b) $I_2 = P.V. \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+b^2)}$.

con $\alpha, b > 0$ e $\epsilon \in \mathbf{R}$.

a) In questo caso la funzione integranda presenta tre singolarita': due nel piano complesso date da $\pm i$, e dal polo reale in $x - 1$. Possiamo dunque usare la (5.71), scegliendo un cammino che passi al di sopra di $x = 1$ e chiuda nel piano complesso, integrando il prolungamento analitico della funzione sul cammino chiuso. Andiamo a calcolare il residuo in $z = i$, l'unico che cade all'interno

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}, z = i \right] = \frac{1}{2i} \frac{1}{i-1} = -\frac{1+i}{4i}.$$

Notiamo inoltre che

$$\left| \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} \right| \leq \frac{1}{(R-1)(R^2-1)},$$

dunque possiamo sfruttare il lemma del cerchio grande per mandare a zero l'integrale sulla circonferenza di raggio R nel limite $R \rightarrow \infty$. Sommando tutti i contributi

$$\begin{aligned} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} &= -2\pi i \frac{1+i}{4i} + i\pi c_{-1}[x=1] \\ &= -\pi \frac{1+i}{2} + \frac{i\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

in cui il contributo dato dal semicerchio attorno al polo

$$c_{-1}[x = 1] = \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z-1)(z^2+1)}, z = 1 \right] = \frac{1}{2}.$$

b) Innanzitutto, sfruttando le proprietà di simmetria della funzione andiamo a riscrivere l'integrale come

$$I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)} \right].$$

Abbiamo a che fare con una singolarità reale in $x = 0$, e due nel piano complesso in $z = \pm ib$. L'integranda soddisfa inoltre il lemma di Jordan dunque possiamo integrare su un cammino del tipo in Figura 5.8 che passa attorno a zero. Il contributo dei residui complessi sarà dato da

$$\operatorname{Res} \left[\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}, z = ib \right] = -\frac{e^{-ab}}{2b^2},$$

mentre per il polo reale

$$\operatorname{Res} \left[\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}, z = 0 \right] = \frac{1}{b^2}.$$

In totale

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)} = -2\pi i \frac{e^{-ab}}{2b^2} + \frac{i\pi}{b^2} = \frac{i\pi}{b^2} (1 - e^{-ab}),$$

e infine

$$I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)} \right] = \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab}).$$

5.5 La trasformata di Laplace inversa

Un caso importante in cui il teorema dei residui semplifica notevolmente la trattazione degli integrali è collegato dalla trasformata di Laplace¹⁰:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (5.78)$$

e in particolare al calcolo della funzione di partenza $f(t)$, che definita tramite la trasformata inversa come:

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C-iR}^{C+iR} e^{tz} F(z) dz, \quad t > 0, \quad (5.79)$$

in cui l'integrale viene svolto sull'asse verticale del piano complesso $\operatorname{Re}(z) = C > 0$, che abbia alla sua sinistra tutte le singolarità di $F(z)$.

Nota 5.5.1 Vediamo come la trasformata di Laplace ci permetta di passare da un problema differenziale ad uno di natura algebrica più semplice. Prendiamo ad esempio il caso di un condensatore RC in cui

10: La trasformata di Laplace è analitica nel dominio

$$D : \operatorname{Re}(p) > \sigma \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \arg(p - \sigma) < \frac{\pi}{2},$$

if $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$, $\sigma \geq 0$, $t > 0$.

volgiamo calcolare la differenza di potenziale $V(t)$. Data l'equazione

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{RC}, \quad (5.80)$$

applichiamo ad entrambi i membri la trasformata di Laplace (5.78).

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dV}{dt} dt &= V(\infty) - V(0) - \int_0^{\infty} V(t) e^{-st} (-s) dt \\ &= -V(0) + s \int_0^{\infty} V(t) e^{-st} dt \\ &= -V(0) + s v(s) = - \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{V}{RC} dt = -\frac{v(s)}{RC}, \end{aligned} \quad (5.81)$$

avendo supposto che per $V(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ e definito $v(s)$ la trasformata del potenziale. In questo nodo avremmo ottenuto un'equazione algebrica la cui soluzione e' data immediatamente da:

$$v(s) = \frac{V(0)}{s + \frac{1}{RC}}. \quad (5.82)$$

Assumendo che $F(z)$ sia una funzione razionale monodroma e tale che $F(z) \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$, allora e' possibile dimostrare che:

$$f(t) = \sum_{j=1}^N \text{Res} [e^{tz} F(z), z_j], \quad (5.83)$$

con $z_{j=1, \dots, N}$ poli di $F(z)$. Per dimostrare la relazione precedente consideriamo il cammino di Bromwich \mathcal{B} mostrato nel pannello superiore di Figura 5.11. In questo caso:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} e^{tz} F(z) dz &= \int_C e^{tz} F(z) dz + \int_{BD} e^{tz} F(z) dz + \int_{EF} e^{tz} F(z) dz + \\ &+ \int_{\text{Re}(z)=C} e^{tz} F(z) dz. \end{aligned} \quad (5.84)$$

L'integrale sui due segmenti BD e AD vanno a zero per $R \rightarrow \infty$, grazie alla convergenza uniforme della funzione $F(z)$:

$$\left| \int_{BD} e^{tz} F(z) dz \right| \leq \int_{C+iR}^{iR} |e^{t(x+iR)} F(x+iR)| |dz| \leq C e^{tC} \mu_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (5.85)$$

Allo stesso modo, l'integrale sul semicerchio tende a zero a causa del lemma di Jordan, e dunque nel limite $R \rightarrow \infty$ la (5.84) diviene:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{B}} e^{tz} F(z) dz = 2\pi i f(t) = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} [e^{tz} F(z), z_j]. \quad (5.86)$$

Esempio 5.5.1 Come esempio, andiamo a considerare la seguente

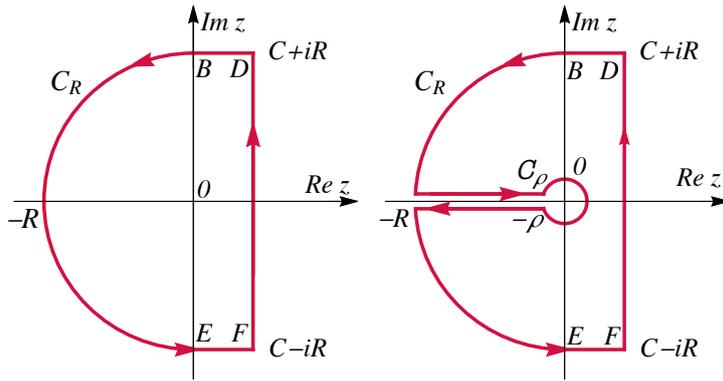


Figure 5.11: Contorni di Bromwich (sinistra) e Hankel (destra) usati per integrare la trasformata di Laplace inversa (5.83).

trasformata di Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{tz}}{z^2 + a^2} dz .$$

In questo caso la funzione $F(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ e' monodroma e ha due poli semplici in $z = \pm ia$. Usando l'equazione (5.83) otteniamo immediatamente:

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{Res} \left[\frac{e^{tz}}{z^2 + a^2}, ia \right] + \text{Res} \left[\frac{e^{tz}}{z^2 + a^2}, -ia \right] \\ &= \frac{e^{iat}}{2ia} - \frac{e^{-iat}}{2ia} = \frac{\sin(at)}{a} . \end{aligned}$$

Possiamo generalizzare il risultato trovato al caso in cui la funzione $F(z)$ sia polidroma, e dunque il cammino chiuso deve essere specificato in modo da considerare solo il ramo principale della funzione. Assumiamo percio' che $F(z)$ sia analitica nel piano complesso e abbia un punto di diramazione in $z = 0$ e $z = \infty$. Supponiamo inoltre che $F(z) \rightarrow 0$ uniformemente per $|z| \rightarrow \infty$, e $zF(z) \rightarrow A$ uniformemente for $|z| \rightarrow 0$. Integrando l'inversa della trasformata di Laplace sul cammino di *Hankel* dato dal grafico in basso in Figura 5.11 vale la relazione:

$$f(t) = \sum_{j=1}^N \text{Res} [e^{tz}F(z), z_j] + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-tx} [F(xe^{-i\pi}) - F(xe^{i\pi})] dx + A, \tag{5.87}$$

dove z_j sono di nuovo gli N poli di $F(z)$, che e' la parte univoca ($-\pi < \text{arg} z < \pi$) della funzione polidroma. Seguendo il cammino chiuso si ha:

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} [e^{tz}F(z), z_j] &= \int_{\mathcal{H}} e^{tz}F(z)dz = \int_{C_R} e^{tz}F(z)dz \\ &+ \int_{-R}^{-\rho} e^{tz}F(z)dz + \int_{-\rho}^{-R} e^{tz}F(z)dz \\ &+ \int_{C_\rho} e^{tz}F(z)dz + \int_{BD} e^{tz}F(z)dz \\ &+ \int_{EF} e^{tz}F(z)dz + \int_{\text{Re}(z)=C} e^{tz}F(z)dz , \end{aligned} \tag{5.88}$$

in cui R e ρ sono rispettivamente i raggi del semicerchio grande e piccolo. Come mostrato in precedenza, l'integrale sul semicerchio grande, e quelli sui segmenti orizzontali BD e EF vanno a zero nel limite $R \rightarrow \infty$, come conseguenza della convergenza uniforme della funzione $F(z)$. Focalizziamoci dunque sull'integrale sopra il cerchio piccolo centrato attorno a $z = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} e^{tz} F(z) dz &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \left[\frac{A}{z} + \tilde{F}(z) \right] e^{tz} dz \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi}^{-\pi} i e^{t\rho e^{i\theta}} \rho \frac{A}{\rho e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta = -2\pi i A. \end{aligned} \quad (5.89)$$

D'altro canto, sul taglio inferiore del contorno, $z = x e^{-i\pi} = -x$ ($x > 0$), ottenendo

$$\int_{-R}^{-\rho} e^{tz} F(z) dz = - \int_{\rho}^R e^{-tx} F(x e^{-i\pi}) dx. \quad (5.90)$$

Allo stesso modo, sul taglio superiore si ha $z = x e^{i\pi} = -x$ ($x > 0$), e dunque:

$$\int_{-R}^{-\rho} e^{tz} F(z) dz = - \int_R^{\rho} e^{-tx} F(x e^{i\pi}) dx = \int_{\rho}^R e^{-tx} F(x e^{i\pi}) dx. \quad (5.91)$$

Sommando tutti i risultati ottenuti fino ad ora si ha:

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} [e^{tz} F(z), z_j] &= -2\pi i A - \int_{\rho}^R e^{-tx} [F(x e^{-i\pi}) - F(x e^{i\pi})] dx + \\ &+ \int_{\text{Re}(z)=C} e^{tz} F(z) dz. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Prendendo infine i limiti $\rho \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ otteniamo il risultato cercato.

5.6 Gli integrali di Fresnel

In questa sezione andiamo ad applicare il teorema dei residui agli integrali di Fresnel¹¹

$$S(x) = \int_0^x \sin t^2 dt \quad , \quad C(x) = \int_0^x \cos t^2 dt, \quad (5.93)$$

che giocano un ruolo importante nelle equazioni della diffrazione di Fresnel nel caso di campo piccolo.

Gli integrali (5.93) possono essere calcolati in forma chiusa in termini di funzioni elementari solo in alcuni specifici casi. Noi andremo a considerare il limite in cui $x \rightarrow \infty$. In questo caso la soluzione esplicita delle (5.93) si ottiene considerando l'integrazione nel piano complesso della funzione $f(z) = e^{iz^2}$ lungo un circuito chiuso Γ , percorso in senso antiorario, mostrato in Fig. 5.13, dato da uno spicchio di circonferenza dato dal segmento $[0, R]$, dall'arco $C_R = \{z : R e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi/4]\}$, e dal

11: Augustin-Jean Fresnel e' stato un fisico francese (1788-1827), unanimamente riconosciuto come uno di padri fondatori della teoria ondulatoria della luce.

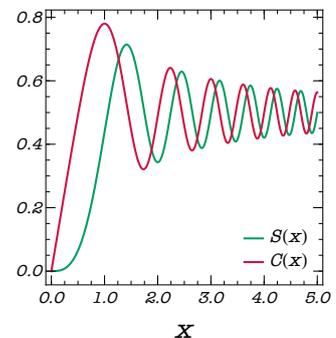


Figure 5.12: Andamento numerico degli integrali di Fresnel al variare dell'estremo di integrazione x .

segmento obliquo $L = \{z : \rho e^{i\pi/4}, 0 \leq \rho \leq R\}$. Avremo dunque

$$\oint_{\Gamma} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + \int_L e^{iz^2} dz = 0, \quad (5.94)$$

in cui la somma e' nulla dato che la funzione non ha singolarita' nel dominio chiuso.

Analizziamo il contributo sullo spicchio di circonferenza, e definiamo $\xi = z^2$, tale che

$$\int_{C_R} e^{iz^2} dz = \int_{\mathcal{C}_{R^2}} \frac{e^{i\xi}}{2\sqrt{\xi}} d\xi, \quad (5.95)$$

in cui \mathcal{C}_{R^2} e' il quarto di cerchio di raggio R^2 . La funzione $g(\xi) = 1/2\sqrt{\xi}$ soddisfa il lemma di Jordan e nel limite $R \rightarrow \infty$ l'integrale va a zero. Sul segmento obliquo ($z^2 = \rho^2 e^{i\pi/2} = i\rho^2$)

$$\int_L e^{iz^2} dz = \int_R^0 e^{i\rho^2} e^{i\pi/4} d\rho = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -e^{i\pi/4} \sqrt{\pi}. \quad (5.96)$$

Mandando a infinito il raggio, $R \rightarrow \infty$, avremo dunque:

$$I = \int_0^\infty e^{ix^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + i), \quad (5.97)$$

da cui ricaviamo immediatamente gli integrali di Fresnel:

$$C(x \rightarrow \infty) = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \text{Re}(I) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (5.98)$$

$$S(x \rightarrow \infty) = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \text{Im}(I) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (5.99)$$

5.7 La trasformata di Fourier della Gaussiana

Una delle funzioni piu' note non solo in Fisica, ma in ogni ambito della scienza e' la Gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$. Una delle semplificazioni apportate dagli integrali con i residui e' il calcolo della trasformata di Fourier della $f(x)$:

$$I(k) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ikx} dx. \quad (5.100)$$

Per farlo andiamo ad integrare la funzione complessa e^{-z^2} sul cammino rettangolare mostrato in Figura 5.14, dato dai segmenti orizzontali $-R \leq z \leq R$ e $-R + ik/2 \leq z \leq R + ik/2$, e dai due verticali $R \leq z \leq R + ik/2$ e $-R \leq z \leq -R + ik/2$.

Scomponendo i vari pezzi del percorso:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} e^{-z^2} dz &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_R^{R+ik/2} e^{-(x+ik/2)^2} dx + \int_0^{k/2} e^{-(R+iy)^2} i dy \\ &+ \int_{k/2}^0 e^{-(-R+iy)^2} i dy = 0. \end{aligned} \quad (5.101)$$

in cui la somma dei residui e' nulla dato che non ci sono singolarita' all'interno del percorso chiuso. I due integrali sui segmenti verticali

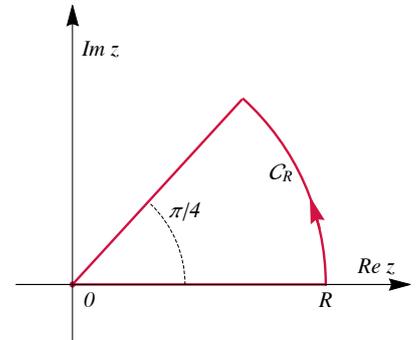


Figure 5.13: Percorso di integrazione per il calcolo degli integrali di Fresnel $S(x)$ e $C(x)$ nel limite $x \rightarrow \infty$.

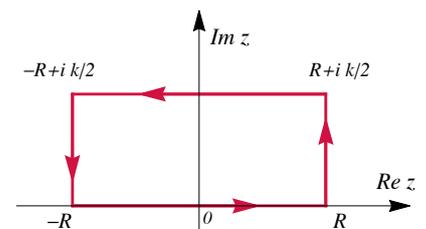


Figure 5.14: Percorso di integrazione per il calcolo della trasformata di Fourier della gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$.

si possono semplificare, espandendo il quadrato agli esponenziali e sfruttando la formula di Eulero:

$$i \int_0^{k/2} e^{-(R+iy)^2} dy - i \int_0^{k/2} e^{-(-R+iy)^2} dy = \int_0^{k/2} e^{-(R^2-y^2)} \sin(2Ry) dy . \quad (5.102)$$

Nel limite $R \rightarrow \infty$ il contributo dei tratti verticali va a zero dato che

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{k/2} e^{-(R^2-y^2)} \sin(2Ry) dy \right| &\leq \int_0^{k/2} |e^{-(R^2-y^2)}| dy = e^{-R^2} \int_0^{k/2} |e^{y^2}| dy \\ &\leq e^{-R^2} e^{\frac{k^2}{4}} \frac{k}{2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 . \end{aligned} \quad (5.103)$$

Dall'equazione (5.101) ci rimangono solo gli integrali sui tratti orizzontali, tali che nel limite $R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\frac{k}{2})^2} dx \\ &= e^{\frac{k^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ikx} dx . \end{aligned} \quad (5.104)$$

L'ultimo termine a destra della precedente coincide proprio con la trasformata di Fourier che stiamo cercando, mentre il primo termine a sinistra e' un integrale notevole, di Gauss, il cui valore e' $\sqrt{\pi}$. Otteniamo dunque infine

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4}} \sqrt{\pi} . \quad (5.105)$$

Notiamo infine che la precedente espressione e' valida per ogni $k \in \mathbf{R}$ dato che per $k < 0$ si ha $I(-k) = I(k)$.

