

## Diario delle lezioni del corso di MMMF, AA 2020-20, aula Amaldi

24/02/2020 (2 ore)(2)

Introduzione ai numeri complessi. Piano di Argand-Gauss; rappresentazione cartesiana e polare. Formula di Euler - de Moivre. Interpretazione geometrica delle operazioni elementari sui numeri complessi. Disuguaglianza triangolare. Esempi. Interpretazione geometrica del prodotto e della potenza n-esima. Radice n-esima come funzione polidroma; esempio. La radice n-esima dell'unita'.

25/02/2020 (2 ore)(4)

Il piano complesso come spazio normato (e quindi metrico). Equazione della retta nel piano complesso (forma parametrica e non). Intorno, dominio (aperto connesso); esempi di domini semplicemente e doppiamente connessi. Proiezione stereografica e punto all'infinito. La trasformazione  $z \rightarrow 1/z$ , che mappa l'intorno di 0 nell'intorno di infinito, e viceversa. La trasformazione reciproca  $w=1/z$ , e suo significato geometrico. Funzioni complesse di variabile complessa polidrome e monodrome. Funzioni iniettive, surgettive e bigettive, con esempi. Parte reale ed immaginaria di  $f(z)$ :  $f(z)=u(x,y)+i v(x,y)$ . Esempi in cui, date  $u$  e  $v$ , si costruisce  $f(z)$ , in generale come funzione di  $z$  e  $\bar{z}$ .

26/02/2020 (2 ore)(6)

La continuita' di  $f(z)$  equivale alla continuita' di  $u(x,y)$  e  $v(x,y)$ . Derivabilita' in un punto, analiticita' in un dominio, condizioni di Cauchy-Riemann e implicazioni. Esempi. Regole formali di derivazione.

27/02/2020 (2 ore)(8)

Funzione armonica in un dominio come parte reale (o immaginaria) di una funzione analitica, e costruzione della parte immaginaria (o reale). Esercizio. Funzioni analitiche e sistemi di coordinate curvilinee ortogonali del piano, generate dalle curve di livello di  $u(x,y)=\text{cost}$  e  $v(x,y)=\text{cost}$ . Funzione analitica come trasformazione conforme.

28/02/2020 (2 ore)(10)

La trasformazione  $w=1/z$  trasforma cerchi in cerchi (in rette nel caso degenere). La trasformazione di Moebius come trasf. invertibile che contiene, come casi particolari, la trasf. lineare e reciproca, e' un gruppo non commutativo. La trasformazione di Moebius come composizione, nell'ordine, di una trasf. lineare, di una reciproca, e di una lineare: essa trasforma cerchi in cerchi (in rette nel caso degenere). Funzione  $z^{\{1/2\}}$  polidroma. Rotazione intorno a 0 e passaggio da una determinazione all'altra. Definizione di rami monodromi.

02/03/2020 (2 ore)(12)

Def. di punto di diramazione. 0 e  $\infty$  sono i punti di diramazione. La funzione  $z^{1/2}$  e' analitica nel piano tagliato da 0 all'infinito. La funzione riprende il suo valore dopo due giri; secondo foglio; la sup. a due fogli e' topologicamente equivalente a una sfera (di Riemann) di genere = 0. Caso  $((z-z_1)(z-z_2))^{1/2}$ : punti di diramazione  $z_1, z_2$ ; taglio da  $z_1$  a  $z_2$ ; sup. di Riemann a due fogli topologicamente equiv. a sfera (genere = 0).

03/03/2020 (2 ore)(14)

La funzione esponenziale  $w=e^z$ ; periodicit  ed assenza di zeri. Trasforma il reticolo ortogonale del piano  $z$  nel reticolo curvilineo ortogonale polare del piano  $w$ . La funzione inversa  $w=\text{Log } z$  e' una funzione polidroma a infiniti valori. Girando intorno a 0 nel piano  $z$ , con  $0 < \arg z < 2\pi$ , la funzione subisce l'incremento  $2\pi i$ . 0 e infinito sono punti di diram., e il piano tagliato da 0 a infinito e' mappato sulla striscia orizzontale  $0 < v < 2\pi$ . La superficie di Riemann ha a infiniti fogli. Esempi ed esercizi sul logaritmo.  $W=\sin z$  e  $W=\sinh z$ ; periodicit  e zeri di funzioni trigonometriche e iperboliche. Rette verticali  $\rightarrow$  iperboli di fuochi 1,-1;

12/03/2020 (2 ore)(16)

Rette orizzontali  $\rightarrow$  ellissi di fuochi 1,-1. La striscia verticale  $-\pi/2 < x < \pi/2 \rightarrow$  piano con tagli da 1 a + infinito e da -1 a - infinito.  $w=\arcsin z$  ha una doppia infinita' di valori. Sua espressione attraverso radice quadrata e logaritmo. Esempio con  $z=1/2$ . Calcolo dell'arco seno di 2 e di  $i$ .  $z=1,-1$  sono punti di diram. di tipo radice quadrata;  $z=\infty$  e' punto di diram. di tipo logaritmico della funzione  $\arcsin z$ . La funzione e' analitica e monodroma nel piano tagliato da 1 a +infinito, e da -1 a -infinito. L'immagine del piano tagliato e' la striscia verticale  $-\pi/2 < u < \pi/2$  del piano  $w$ . Esercizi per casa: esprimere  $\arccos z$ ,  $\arctan z$ ,  $\arcsinh z$ ,  $\text{arccosh } z$  e  $\text{arctanh } z$  attraverso logaritmo e radice quadrata.

13/03/2020 (2 ore)(18)

Integrazione di funzioni complesse continue lungo curve del piano complesso. Curva continua, iniettiva (di Jordan), curva regolare e regolare a tratti del piano complesso. Curve rettificabili; esempio di curva non rettificabile: la curva di Koch. Definizione di integrale e sua forma parametrica:  $\int f(z(t))z'(t)dt$ . Propriet  elementari dell'integrale. Disuguaglianza di Darboux. Integrali della costante e di  $z$ . Integrale di  $1/(z-z_0)$  lungo arco di cfr centrato in  $z_0$  e sulla cfr, parametrizzando l'arco. Teorema di Cauchy.

16/03/2020 (2 ore)(20)

Dimostrazione usando il lemma di Green (che fa uso della continuit  delle derivate parziali, non dimostrata). Esistenza della primitiva e teorema della primitiva. Teorema di Cauchy per domini multiplamente connessi. Esercizi sull'applicazione del thm

di Cauchy, della primitiva, e della parametrizzazione delle curve per il calcolo di integrali. Cenni su numero di avvolgimenti.

17/03/2020 (2 ore) (22)

Altri esercizi su integrali. Rappresentazione integrale di Cauchy e teorema della media per funzioni analitiche. Altre conseguenze della rappresentazione integrale di Cauchy: teorema del massimo e minimo modulo per  $f(z)$ ; esistenza delle derivate ad ogni ordine di una funzione analitica e loro rappresentazione integrale (senza dimostrazione con limite); Teorema di Morera.

18/03/2020 (2 ore) (24)

Primo e secondo teorema di Liouville. Integrazione su archi infiniti e infinitesimi. Convergenza uniforme sull'arco. Esempi. Il lemma di Jordan. L'integrale  $\int F(z)\exp(i z^2)dz$  sul quarto di circonferenza di raggio  $R$  nel primo quadrante.

19/03/2020 (2 ore) (26)

Introduzione sulle serie di funzioni complesse. Tipi di convergenza: convergenza per punti, assoluta e uniforme, e relazioni tra di esse. M-test Weierstrass. Proprietà della convergenza uniforme: continuità, analiticità della funzione somma, e scambio somma con integrale [dimostrazione]. Teorema di Cauchy-Hadamard (senza dimostrazione). Teorema di Abel. Se  $f(z)$  è sviluppabile in serie di potenze in un disco, è ivi analitica con le sue derivate e lo sviluppo è quello di Taylor (dimostrazione che i coefficienti della serie di potenza corrispondono alle derivate della funzione somma).

20/03/2020 (2 ore) (28)

Esempi di calcolo del raggio di convergenza e studio della convergenza al bordo. Teorema della serie di Taylor per funzioni analitiche (dimostrazione). Esempi di sviluppi in serie di Taylor.

23/03/2020 (2 ore) (30)

Teorema della serie di Laurent (dimostrazione). Singolarità isolate di una funzione analitica. Poli di ordine  $n$  e singolarità essenziali. Definizione di residuo di singolarità isolata al finito, e dimostrazione che coincide col coefficiente  $c_{-1}$  dello sviluppo di Laurent. Teorema dei residui, enunciato.

24/03/2020 (2 ore) (32)

Dimostrazione teorema dei residui. Calcolo del residuo in un polo di ordine  $n$  [dimostrazione]. Residuo di  $f_1(z)/f_2(z)$  in  $z_0$ , zero semplice di  $f_2(z)$ . Residuo all'infinito. Teorema sulla somma dei residui in  $\bar{C}$ . Esercizi vari su: i) sviluppi in serie di potenze e regioni di convergenza; ii) classificazione delle singolarità di funzioni elementari nel piano complesso esteso, e calcolo dei rispettivi residui.

25/03/2020 (2 ore) (34)

Esempi di sviluppo serie di Laurent e residui. Calcolo di integrali col teorema dei residui: i) Integrali di funzioni trigonometriche: due esempi.

26/03/2020 (2 ore) (36)

ii) Integrali di funzioni prolungabili nel semi piano superiore o inferiore: due esempi. iii) Integrali di Fourier: esempio.

27/03/2020 (2 ore) (38)

Esercizio su integrali di Fourier. Estensione degli integrali al caso con singolarita' sull'asse reale: l'esempio di  $\sin(ax)/x$ . Integrazione di funzioni polidrome (o riconducibili a funzioni polidrome) col teorema dei residui. Calcolo dell'integrale di  $x^a/(x+1)$  da 0 a infinito, con  $0 < a < 1$ .

30/03/2020 (2 ore) (40)

Altri esercizi sugli integrali di con i residui. Calcolo dell'integrale di  $x^a/(x^2+1)$  da 0 a infinito, con  $-1 < a < 1$ . Integrazione di funzioni polidrome del tipo  $(\log x)^k R(x)$  col teorema dei residui sul contorno Pacman ed esercizi.

31/03/2018 (2 ore) (42)

Integrali al valor principale; definizione e calcolo col teorema dei residui. Esercizi sul calcolo di integrali al valor principale col teorema dei residui.

01/04/2020 (2 ore) (44)

Calcolo dell'anti-trasformata di Laplace col teorema dei residui per funzioni monodrome e polidrome. Integrazione di funzioni polidrome del tipo  $x^{a-1}/(1-x)^a f(x)$  tra 0 e 1 con  $0 < a < 1$  [enunciato].

03/04/2020 (2 ore) (46)

Indice (indicatore logaritmico) di una funzione meromorfa rispetto ad un contorno chiuso. Teorema dell'indice. Teorema di Rouché. Uso del teorema di Rouché per calcolare il numero di radici di un polinomio con modulo minore o uguale ad un  $R$  fissato. Esempi. Teorema fondamentale dell'algebra.

18/04/2020 (2 ore) (48)

Esercizi vari sugli integrali con i residui.